

# 连接上的储层采样

BINYANG DAI\*, Hong Kong University of Science and Technology, China

XIAO HU\*, University of Waterloo, Canada

KE YI, Hong Kong University of Science and Technology, China

对连接进行采样是大规模数据分析中的一项基本任务。与其计算完整的连接结果（可能很大），不如将连接结果的统一样本用于多种用途，例如回答分析查询或训练机器学习模型。在本文中，我们研究了如何在元组流入时保持随机样本连接的问题。在没有连接的情况下，这个问题可以通过一些简单和经典的储层采样算法来解决。但是，连接运算符使问题变得更加困难，因为连接大小可能多项式大于输入。我们针对这个问题提出了一种新的算法，该算法实现了近乎线性的复杂度。关键的技术组件是支持谓词的广义储层采样算法，以及用于通过连接进行采样的动态索引。我们还通过各种连接查询对图形和关系数据进行了广泛的实验，实验结果表明，与现有技术相比，性能有了显著提高。

CCS Concepts: • **Theory of computation** → **Sketching and sampling**; • **Information systems** → **Join algorithms**.

Additional Key Words and Phrases: Data Stream, Acyclic Join, Uniform Sample

## ACM Reference Format:

Binyang Dai, Xiao Hu, and Ke Yi. 2024. 连接上的储层采样. *Proc. ACM Manag. Data* 2, 3 (SIGMOD), Article 118 (June 2024), ?? pages. <https://doi.org/10.1145/3654921>

## 1 介绍

在大规模数据分析中，人们经常需要在底层关系数据库的查询结果之上计算复杂的函数。但是，连接运算符提出了一个重大挑战，因为连接大小可能多项式大于原始数据库。计算和存储联接结果的成本非常高，尤其是在数据大小不断增加的情况下。因此，对连接结果进行采样是许多复杂分析任务中使用的常用方法，同时提供可证明的统计保证。一种幼稚的方法是首先将联接结果具体化到表中，然后随机访问该表，但这会失去采样的性能优势。早在 1999 年，就有两篇著名的论文 [??] 提出了一个耐人寻味的问题，即是否可以在不计算全连接的情况下获得样本。如 by [?] 中所观察到的，主要障碍是采样算子不能被推下，即  $\text{sample}(R \bowtie S) \neq \text{sample}(R) \bowtie \text{sample}(S)$ 。为了克服这一障碍，我们的想法是设计一些索引结构来指导采样过程。值得注意的是，提出了一个可以在  $O(N)$  时间内构建的非循环连接（正式定义在 Section ?? 中）的索引，其中  $N$  是数据库中的元组数，然后可用于绘制  $O(1)$  时间 [??] 的连接结果样本。请参阅第 ?? 节，以更全面地了解不同联接查询的采样复杂性。

在流式处理设置中，此问题变得更具挑战性，因为输入元组以高速到达。如何有效且持续地保持目前所看到的元组产生的连接结果的统一样本？一个幼稚的解决方案是重新构建索引并在每个元组到达后重新绘制样本，但这会导致处理具有  $N$  元组的流的总运行时间为

\*Both authors contributed equally to this research.

Authors' addresses: Binyang Dai, [bdaiab@connect.ust.hk](mailto:bdaiab@connect.ust.hk), Hong Kong University of Science and Technology, Clear Water Bay, Hong Kong, China; Xiao Hu, [xiaohu@uwaterloo.ca](mailto:xiaohu@uwaterloo.ca), University of Waterloo, 200 University Ave W, Waterloo, Ontario, Canada, N2L 3G1; Ke Yi, [yike@ust.hk](mailto:yike@ust.hk), Hong Kong University of Science and Technology, Clear Water Bay, Hong Kong, China.

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. Copyrights for components of this work owned by others than the author(s) must be honored. Abstracting with credit is permitted. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee. Request permissions from [permissions@acm.org](mailto:permissions@acm.org).

© 2024 Copyright held by the owner/author(s). Publication rights licensed to ACM.

ACM 2836-6573/2024/6-ART118

<https://doi.org/10.1145/3654921>

$O(N^2)$ 。最近, [?] 针对这个问题应用了储层采样算法 [??], 对样本进行增量更新。然而, 它们的索引也存在高昂的维护成本, 在最坏的情况下仍会导致总运行时间为  $O(N^2)$ 。

本文提出了一种新的储层采样算法, 用于保持样本在连接上, 其近线性运行时间为  $O(N \log N + k \log N \log \frac{N}{k})$ , 其中  $k$  是给定的样本量。我们的算法不需要  $N$  的知识; 等效地说, 它在无界流上工作, 并且每个  $N \in \mathbb{Z}^+$  在前  $N$  元组上的总运行时间满足上述边界。这一结果建立在以下两个关键技术要素之上, 这两个要素都是独立的。

**使用谓词进行储层采样.** Knuth [?] 归因于 Waterman 的经典储层采样算法, 在  $O(N)$  时间内在  $N$  项目流中保持大小为  $k$  的样本, 这已经是最佳的。假设有一个 `skip(i)` 操作可以在  $O(1)$  时间内跳过接下来  $i$  项 `and jump directly to the next (i + 1)-th item`, 那么复杂度可以进一步降低到  $O(k \log \frac{N}{k})$ , 并且有几种算法实现了这个 [??]。在本文中, 我们设计了一种更通用的储层采样算法, 该算法对于给定的谓词  $\theta$ , 仅在  $\theta$  计算为真的项目上保持大小为  $k$  的样本。我们算法的复杂度是  $O\left(\sum_{i=1}^N \min\left(1, \frac{k}{r_{i+1}}\right)\right)$ , 其中  $r_i$  通过谓词的前  $i-1$  项中的项数。请注意, 当  $\theta(\cdot) \equiv \text{true}$  时, 我们有  $r_i = i-1$ , 并且边界简化为  $O(k \log \frac{N}{k})$ , 与经典结果匹配。同时, 随着流变得稀疏, 复杂性会优雅地降低, 即通过谓词的项目越来越少。直观地说, 稀疏流更困难, 因为跳过项目是不安全的。在只有一个项目通过谓词的极端情况下, 算法需要将该项目作为样本返回, 我们必须检查每个项目以免错过它。

然而, `skip(i)` 需要  $O(1)$  时间的假设通常是不正确的: 至少必须使用计数器来计算跳过了多少项目, `which already takes O(i) time`。有趣的是, 储层对连接的采样问题提供了一个很好的场景, 在这个场景中, 这个假设是正确的, 只是它有一个  $O(\log N)$  成本。已知 [?]  $N$  元组的连接结果可以多达  $N^{\rho^*}$  个, 其中  $\rho^*$  是连接的小数边盖数 (详见第 ?? 节)。因此, 输入元组流隐式定义了一个多项式较长的 (conceptual) 连接结果流, 我们希望能从中采样。由于后者有很好的结构, `there is no need to materialize this simulated join result stream; and moreover` 可以跳过它的项目而不一一计算它们。

**从连接中动态采样.** 设  $Q$  为非循环联接查询,  $\mathcal{R}$  大小为  $N$  的数据库实例, 并在  $\mathcal{R}$  上  $Q(\mathcal{R})$  的联接结果。第二个技术要素是支持以下操作的索引结构:

- (1) 将元组添加到  $\mathcal{R}$  后, 索引结构可以在摊销  $O(\log N)$  时间内更新。
- (2) 索引隐式定义一个数组  $J$ , 其中包含  $Q(\mathcal{R})$  和一些虚拟元组, 但可以保证  $|J| = O(|Q(\mathcal{R})|)$ , 即虚拟元组不超过一个常数分数。对于任何给定的  $j \in [J]$ , 索引可以在  $O(\log N)$  时间内返回  $J[j]$ 。它还可以在  $O(1)$  的时间内返回  $|J|$ 。
- (3) 对于任何元组  $t \notin \mathcal{R}$  的增量查询  $\Delta Q(\mathcal{R}, t) := Q(\mathcal{R} \cup \{t\}) - Q(\mathcal{R})$  也支持上述内容。

请注意, 上面的操作 (2) 直接解决了连接采样问题: 我们简单地生成一个随机  $j \in [J]$  并找到  $J[j]$ , 如果它是虚拟的, 则重复。自  $|J| = O(|Q(\mathcal{R})|)$  以来, 该过程将在预期  $O(1)$  试验后终止, 因此抽取样本的时间  $O(\log N)$  预期。这仅比前面的索引结构 [??] 稍慢, 后者本质上是静态的。此外, 操作 (1) 和 (2) 一起也为储层采样连接问题提供了解决方案: 对于每个元组, 我们首先在  $O(\log N)$  时间内更新索引, 然后在  $O(k \log N)$  时间内重新绘制  $k$  样本。这导致总时间为  $O(Nk \log N)$ , 已经比 [?] 好, 但仍然不是近线性的。

为了实现近线性时间, 我们将操作 (3) 与储层采样算法结合使用。观察结果是, 每个传入元组  $t$  都会添加一批联接结果, 这些结果由 `delta` 查询  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  定义。如果我们可以按位置访问  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  中的任何元组, 那么我们可以很容易地实现 `skip`。我们的索引几乎可以提供此功能, 只是它在  $\Delta J$  上这样做, 是包含一些虚拟元组的  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  的超集。这正是我们需要支持谓词的储层采样算法的原因。我们将在批处理流上运行它, 其中每个批处理是相应增量查询的  $\Delta J$ 。谓词对于实元组的计算结果为 `true`, 而对于虚拟元组的计算结果为 `false`。最后, 由于每批都是密集的 (至少一个恒定的 `fraction` 是真实的), 我们的储层采样算法将具有良好的性能。

本文的贡献总结如下:

- (Section ??) 我们用谓词表述储层取样问题。假设 skip 需要  $O(1)$  时间，我们设计了一种算法，该算法可以在时间  $O\left(\sum_{i=1}^N \min\left(1, \frac{k}{r_{i+1}}\right)\right)$  中保持大小为  $k$  的样本（无需替换），我们还表明这是实例最优的。
- (Section ??) 我们提出了一个非循环连接的动态索引，该索引可以在  $O(\log N)$  摊销时间内更新，并在  $O(\log N)$  时间内从完整查询或增量查询返回样本。结合我们的储层采样谓词算法，我们展示了如何在时间  $O(N \log N + k \log N \log \frac{N}{k})$  求解储层采样连接问题。We show how our algorithm can be optimized when key constraints are present.
- (Section ??) 我们使用广义超树分解技术将算法扩展到循环连接。在本例中，运行时间变为  $O(N^w \log N + k \log N \log \frac{N}{k})$ ，其中  $w$  是查询的小数超树宽度。
- (Section ??) 我们实现我们的算法，并在图形和关系数据上对其进行评估。实验结果表明，该算法明显优于 [?] 最先进的解决方案。

## 2 预赛

### 2.1 问题定义

我们首先回顾一下关系代数 [?] 中的一些标准符号。多路（自然）联接查询可以定义为超图  $Q = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ，其中  $\mathcal{V}$  是属性集， $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{V}}$  是关系集。设  $\text{dom}(x)$  是属性  $x \in \mathcal{V}$  的域。数据库实例  $\mathcal{R}$  由每个  $e \in \mathcal{E}$  的关系实例  $R_e$  组成，该实例是一组元组，每个元组  $t \in R_e$  为每个属性  $v \in e$  指定一个值 ( $\text{dom}(v)$ )。对于元组  $t$ ，我们用  $\text{supp}(t)$  来表示对  $t$  的支持，即定义  $t$  的属性集。对于属性  $x$  和元组  $t$   $x \in \text{supp}(t)$ ，投影  $\pi_x t$  是属性  $x$  上的元组  $t$  值。实例  $\mathcal{R}$  的  $Q$  连接结果，用  $Q(\mathcal{R})$  表示，是元组的所有组合的集合，每个  $R_e$  元组一个，每个元组一个，它们共享其公共属性的共同值，即

$$Q(\mathcal{R}) = \left\{ t \in \prod_{x \in \mathcal{V}} \text{dom}(x) \mid \forall e \in \mathcal{E}, \exists t_e \in R_e, \pi_e t = t_e \right\}. \quad (1)$$

对于关系  $R_e$  和元组  $t$ ，半连接  $R_e \ltimes t$  返回来自  $R_e$  的元组集，这些元组在属性上具有相同的值， $e \cap \text{supp}(t)$  与  $t$ 。对于一对关系  $R_e, R_{e'}$ ，半连接  $R_e \ltimes R_{e'}$  是来自  $R_e$  的元组的集合，它在属性上具有相同的值， $e \cap e'$  至少有一个来自  $R_{e'}$  元组。请注意，对于联接查询  $Q$ ，增量查询  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  等于  $Q(\mathcal{R} \cup \{t\}) \ltimes t$ 。

在流式处理设置中，我们将每个元组建模为  $i \in \mathbb{Z}^+$  的三元组  $u = (t, i, R_e)$ ，表示元组  $t$  在时间  $i$  插入到  $R_e$  的关系中。设  $D$  是输入元组的流，按其时间戳排序。设  $\mathcal{R}^i$  为由流的前  $i$  元组定义的数据库，并将  $\mathcal{R}^0 = \emptyset$  设置为。我们使用  $N$  来表示流的长度，该长度仅用于分析。这些算法不需要  $N$  的知识，因此它们在无界流上工作。

连接采样问题有两个版本：第一个是 [????] 中研究的连接采样问题。这是一个索引（数据结构）问题，我们希望有一个支持从  $Q(\mathcal{R}^i)$  中提取样本的索引。对于这个问题，我们关心的是采样时间  $t_s$  和更新时间  $t_u$ 。对于静态索引，我们关心的是索引构建时间和采样时间。另一个是储层取样问题，如 [???] 年所研究的那样，我们希望保持  $Q(\mathcal{R}^i)$  的  $k$  随机样本，而不对每个  $Q(\mathcal{R}^i), i \in \mathbb{Z}^+$  进行替换。对于这个问题，我们只关心总运行时间。请注意，前者的任何解都会为后者生成总时间  $O(t_u \cdot N + t_s \cdot Nk)$  的解，但这可能不是最优的。对于这两个版本的问题，所有算法，包括我们的算法，都使用  $O(N)$  空间。请注意，经典储层采样仅使用  $O(k)$  空间，但当  $Q$  具有连接时，亚线性空间是不可能的。只需考虑一个双表联接  $Q := R_1(X, Y) \bowtie R_2(Y, Z)$ 。假设流中的前  $N$  元组都在  $R_1$  中。该算法必须将它们全部保留在内存中，否则当  $R_2$  中的某些元组到达时，它将错过第一个连接结果，该结果必须进行采样。

我们遵循数据复杂度 [?] 的惯例，根据输入大小  $N$  和样本大小  $k$  来分析运行时间，同时将  $Q$  的大小（即  $|\mathcal{V}|$  和  $|\mathcal{E}|$ ）作为常数。我们遵循集合语义，因此将元组插入到已经具有元组的关系中是无效的。因此，我们假设已从输入流中删除重复项。

## 2.2 过往成绩

**Sampling over joins.** Chaudhuri 等人 [?] 展示了, 对于基本的双表连接  $R_1(x_1, x_2) \bowtie R_2(x_2, x_3)$ , 如何在  $O(N)$  时间内构建索引结构, 从而可以在  $O(1)$  时间内绘制样本。Acharya et al. [?] 在多路连接方面实现了相同的复杂度结果, 但所有连接都仅限于外键连接。这些结果后来被推广到所有非循环连接 [? ?]。所有这些关于非循环连接的采样索引都是静态的。对于循环连接, 有一个可以在  $O(N)$  时间内构建的索引, 而一个样本可以在  $O\left(\frac{N^{\rho^*+1}}{Q(\mathcal{R})}\right)$  时间内绘制 [? ], 最近改进为  $O\left(\frac{N^{\rho^*}}{Q(\mathcal{R})}\right)$  [? ?], 他们也使索引动态化, 但需要注意的是, 循环连接的采样时间明显高于非循环连接的采样时间。

**连接上的储层取样.** 当  $Q$  没有连接时, 经典的储层采样算法 [?]  $O(N)$  时间内解决问题。假设 skip 需要  $O(1)$  时间, 这可以简化为  $O(k \log \frac{N}{k})$  [? ?]。Zhao et al. [?] 研究了非循环连接的问题, 并提出了一些有效的启发式方法。但是, 在最坏的情况下, 他们的解决方案需要  $O(N^2)$  时间, 这与在每个时间步重建静态连接采样索引 [? ?] 的朴素解决方案相同。

**硬度结果.** 在本文中, 我们将重点介绍仅插入流上的非循环连接。根据一些现有的硬度结果, 这两个限制对于实现近线性运行时间都是必要的。观察结果是, 对查询进行采样至少与相应的布尔查询一样困难 (即确定是否  $Q(\mathcal{R}) = \emptyset$ ): 如果从采样算法返回任何样本, 我们可以为布尔查询返回 true, 否则返回 false。众所周知, 计算一个布尔循环查询需要  $\Omega(N^w)$  时间, 对于查询的某个宽度参数  $w > 1$  [?]。因此, 对于循环查询, 即使在静态数据库上, 也没有希望在近乎线性的时间内获取连接样本。同时, 对于一般 (更准确地说, 是非分层的) 非循环查询, 已知必须  $\Omega(\sqrt{N})$  更新时间, 以保持布尔答案, 当同时允许插入和删除时 [?]。这意味着在全动态流中, 储层采样问题至少需要  $\Omega(N^{1.5})$  时间。

## 3 使用谓词进行储层取样

### 3.1 重新审视储层取样

Reservoir sampling [? ?] 是一系列算法, 用于维护来自可能无限流的  $k$  项目的随机样本, 而无需替换。如 [?] 中所述, 经典版本的工作原理如下。**(第 1 步)** 它初始化一个大小为  $k$  的数组  $S$  (称为水库), 其中包含输入的前  $k$  项。**(第 2 步)** 对于每个新的输入  $x_i$ , 它都会生成一个随机数,  $j$  均匀地  $[1, i]$ 。如果  $j \leq k$ , 则将  $S[j]$  替换为  $x_i$ 。否则, 它只会丢弃  $x_i$ 。在任何时候,  $S$  都是一个统一的样品, 没有替换迄今为止处理的所有物品的  $k$  项目。显然, 此算法需要  $O(N)$  时间来处理  $N$  项流。此外, 该算法不需要  $N$  的知识, 因此它可以在无界流上工作。

假设一个 skip ( $i$ ) 操作可以在  $O(1)$  时间内跳过下一个  $i$  项, 则已知更有效的版本。特别是, 我们将使用 [?]。它基于这样一个事实, 即在一组  $N$  独立的随机数中, 绘制均匀分布  $\text{Uni}(0, 1)$ , 最小  $k$  随机数的索引是一个样本, 没有替换来自索引集  $\{1, 2, \dots, N\}$ 。该算法的工作原理如下。**(第 1 步)** 它像以前一样初始化  $S$ , 并为  $u \sim \text{Uni}(0, 1)$  设置  $w = u^{1/k}$ 。**(第 2 步)** 它从几何分布  $\text{Geo}(w)$   $q$  抽取一个随机数, 并跳过接下来的  $q$  项。然后, 它将  $S$  中的随机项目替换为  $x_i$ , 并将  $w$  更新为  $u \sim \text{Uni}(0, 1)$  的  $w \cdot u^{1/k}$ 。可以 [?] 表明, 在任何时候,  $S$  都是一个样本, 没有替换迄今为止处理的所有项目的  $k$  个项目, 并且该算法在  $O(k \cdot \log \frac{N}{k})$  预期的时间内运行, 这是最优的。

### 3.2 使用谓词进行储层取样

使用谓词进行储层采样问题定义如下。给定一个项目、一个谓词  $\theta$  和一个整数  $k > 0$  的输入流, 它要求维护一个大小为  $k$  个  $\theta$  计算结果为 true 的所有项目的样本 (这些项目也称为真实项目, 而其他项目则是虚拟的)。我们假设  $\theta$  可以在  $O(1)$  的时间内进行评估。请注意,  $O(N)$ -time 算法很容易支持谓词: 我们只需评估每个项目的  $\theta$ , 并将真实项目提供给算法。调整  $O(k \log \frac{N}{k})$  算法更不重要, 因为 skip 操作跳过了未知数量的实际项目。

---

**Algorithm 1:** RESERVOIR ( $D, k, \theta$ )

---

**Input** : An input stream  $D$  of items, an integer  $k > 0$ , and a predicate  $\theta$ ;

**Output**: A set  $S$  maintaining  $k$  random samples without replacement of items on which  $\theta$  evaluates to true;

```
1  $S \leftarrow \emptyset$  ;
2 while  $|S| < k$  do
3    $x \leftarrow D.\text{next}()$  ;
4   if  $x = \text{null}$  then break ;
5   if  $\theta(x)$  then  $S \leftarrow S \cup \{x\}$  ;
6  $w \leftarrow \text{rand}()^{1/k}$  ;
7  $q \leftarrow \lfloor (\ln(\text{rand}()) / \ln(1 - w)) \rfloor$  ;
8 while true do
9    $x \leftarrow D.\text{skip}(q)$  ;
10  if  $x = \text{null}$  then break ;
11  if  $\theta(x)$  then
12     $y \leftarrow$  a randomly chosen item from  $S$  ;
13     $S \leftarrow S - \{y\} + \{x\}$  ;
14     $w \leftarrow w \cdot \text{rand}()^{1/k}$  ;
15   $q \leftarrow \lfloor (\ln(\text{rand}()) / \ln(1 - w)) \rfloor$  ; (note that  $q \sim \text{Geo}(w)$ )
```

---

我们将储层采样算法 [?] 调整为算法 ??。在描述中，我们使用以下两个原语：

如果下一项存在，则返回 **next()**，否则 **null**；**skip( $i$ )** 跳过接下来的  $i$  项，并返回第  $(i + 1)$  项（如果存在），否则返回 **null** 项。

与 [?] 相比，我们做了两个改动：（第 2-5 行）当水库没有装满时，我们只添加实物；（第 11-14 行）我们只在算法停在真实项目时更新水库和参数  $w$ 。下面给出的 Algorithm ?? 的正确性证明是相当技术性的。我们首先在这里提供一些直觉。对于流中  $x$  的每个项目，Algorithm ?? 从  $\text{Uni}(0, 1)$  生成一个随机变量，比如  $u_x$ ，并执行第 11-14 行 **for**  $x$  **if**  $u_x < w$ ，因为从  $\text{Uni}(0, 1)$  生成的下一个随机变量小于  $w$  遵循  $w$  参数化的几何分布。我们可以进一步交换两个 **if** 条件（ $w < u$  和  $x$  是实数），因为这两个事件是独立的。然后，可以证明 Algorithm ?? 等价于仅将实数项提供给 [?] 中算法的非谓词版本。

**THEOREM 3.1.** *Algorithms ?? correctly maintains a uniform sample of  $k$  real items.*

- **PROOF.** Algorithm ?? 与 Algorithm ?? 的运行过程基本相同，因为从小于  $w$  的  $\text{Uni}(0, 1)$  中抽取的下一个随机值遵循  $w$  参数化的几何分布。此外，在 Algorithm ?? 中，将第 11 行中的 **if** 条件与第 12 行中的 **if** 条件进行交换是安全的，因为这两个条件是相互独立的。经过这次交换，我们得到算法 ??。请注意，算法 ?? 只是对真实元素运行经典的储层采样，其正确性在 [?] 中得到证明。总之，算法 ?? 的正确性由经典储层采样算法的正确性所证明。□

Algorithm ?? 的时间复杂度取决于真实项和虚拟项在流中的分布方式，更准确地说，由以下定理表征：

**THEOREM 3.2.** *Algorithm ?? runs in  $O(\alpha \cdot (p - 1) + \gamma \cdot \sum_{i=p}^N \frac{k}{r_{i+1}})$  expected time over a stream of  $N$  items, where  $r_i$  is the number of real items in the first  $i - 1$  items,  $p$  is the smallest  $i$  such that  $r_i = k$  (set  $p = N + 1$  if no such  $p$  exists), and  $\alpha$  and  $\gamma$  are the time complexities of  $\text{next}(\cdot)$  and  $\text{skip}(\cdot)$ , respectively.*

---

**Algorithm 2:** NAIVERESERVOIR-I ( $D, k$ )

---

**Input** : An input stream  $D$  of elements, an integer  $k > 0$  and a predicate  $\theta$  ;

**Output:** A set  $S$  maintaining  $k$  uniform samples without replacement of items that pass the predicate  $\theta$  ;

```
1  $S \leftarrow \emptyset$  ;
2 while  $|S| < k$  do
3    $x \leftarrow D.\text{next}()$  ;
4   if  $x = \text{null}$  then break ;
5   if  $\theta(x)$  then  $S \leftarrow S \cup \{x\}$  ;
6  $w \leftarrow \text{rand}()^{1/k}$  ;
7 while true do
8    $x \leftarrow D.\text{next}()$  ;
9   if  $x = \text{null}$  then break ;
10   $u_x \leftarrow \text{rand}()$  ;
11  if  $u_x < w$  then
12    if  $\theta(x)$  then
13       $y \leftarrow$  a randomly chosen element from  $S$  ;
14       $S \leftarrow S - \{y\} + \{x\}$  ;
15       $w \leftarrow w \cdot \text{rand}()^{1/k}$  ;
```

---

---

**Algorithm 3:** NAIVERESERVOIR-II ( $D, k$ )

---

**Input** : An input stream  $D$  of elements, an integer  $k > 0$  and a predicate  $\theta$  ;

**Output:** A set  $S$  maintaining  $k$  uniform samples without replacement of items that pass the predicate  $\theta$  ;

```
1  $S \leftarrow \emptyset$  ;
2 while  $|S| < k$  do
3    $x \leftarrow D.\text{next}()$  ;
4   if  $x = \text{null}$  then break ;
5   if  $\theta(x)$  then  $S \leftarrow S \cup \{x\}$  ;
6  $w \leftarrow \text{rand}()^{1/k}$  ;
7 while true do
8    $x \leftarrow D.\text{next}()$  ;
9   if  $x = \text{null}$  then break ;
10   $u_x \leftarrow \text{rand}()$  ;
11  if  $\theta(x)$  then
12    if  $u_x < w$  then
13       $y \leftarrow$  a randomly chosen element from  $S$  ;
14       $S \leftarrow S - \{y\} + \{x\}$  ;
15       $w \leftarrow w \cdot \text{rand}()^{1/k}$  ;
```

---

PROOF. For the ease of analysis, we add one additional real item as a sentinel object to the end of the stream. We will ignore the cost for this real item later. 让  $S'$  表示索引为 larger than or equal to  $p$  的一组项目。我们通过算法分析  $\text{skip}(\cdot)$  的调用次数 ??。每次 Algorithm ?? 调用  $\text{skip}(\cdot)$  并返回一些 item  $x$  时, 我们说它停在  $x$  处。Note that Algorithm ?? only stops at items that are from  $S'$ . 为了便于分析, 我们考虑了一个等效版本: 对于每个项目, 我们从  $\text{Uni}(0, 1)$  生成一个随机变量, 比如  $u$ , 并仅在成功的试验 (即  $u < w$ ) 执行第 11 - 14 行。停止次数与成功试验次数相同。如果  $w_i$  是处理项目  $x_i$  时  $w$  的值, 则 Algorithm ?? 在  $x_i$  处停止的概率正好是  $i \geq p$  的  $w_i$ 。设  $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, \dots, w_{N+1} \rangle$  算法的状态 ??。对于任何  $\mathbf{w}$ , 我们观察到 (1)  $w_i \in [0, 1]$  if  $i \in [1 \dots N + 1]$ ; (2) 如果  $i < j$ , 则  $w_i \geq w_j$ ; (3)  $w_i = 1$  如果  $i < p$ ; (4)  $w_i = w_j$  if the  $j$ -th item is real and the  $i$ -th item to the  $(j - 1)$ -th item are all dummy. For (4), we use function  $\pi(i)$  to denote the smallest index  $j$  where  $j \geq i$  such that  $x_j$  is real. Note that  $w_i = w_{\pi(i)}$  for  $i \in [p \dots N + 1]$ . 设  $W$  是算法的所有可能状态的集合 ??。  $S'$  的预期停靠站数为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\#\text{stops in } S'] &= \sum_{\mathbf{w} \in W} \Pr(\mathbf{w}) \cdot \mathbb{E}[\#\text{stops in } S' | \mathbf{w}] \\ &= \sum_{\mathbf{w} \in W} \Pr(\mathbf{w}) \cdot \sum_{i=p}^N w_{\pi(i)} = \sum_{i=p}^N \sum_{\mathbf{w} \in W} \Pr(\mathbf{w}) \cdot w_{\pi(i)} = \sum_{i=p}^N \frac{k}{r_i + 1} \end{aligned}$$

最后一个等式背后的基本原理是,  $\sum_{\mathbf{w} \in W} \Pr(\mathbf{w}) \cdot w_{\pi(i)}$  正是  $x_{\pi(i)}$  进入水库的概率。接下来, 我们转到  $\text{next}()$  原语。在第 2 行的  $\text{while}$  循环中, 我们不断将真实物品添加到水库中, 直到它变得满。因此,  $\text{next}()$  的调用次数正好是  $p - 1$ 。把所有东西放在一起, 我们完成了证明。  $\square$

请注意, 在所有项目都为实数的简并情况下, 我们有  $r_i = i - 1$ , 算法 ?? 的运行时间变为  $O(k \log \frac{N}{k})$  (当将  $\alpha, \gamma$  作为  $O(1)$  时), 匹配最佳储层采样运行时间 [??]。在另一种极端情况下, 所有项目都是虚拟的, 因此  $p = N + 1$  和  $r_i = 0$ , 并且运行时间变为  $O(N)$ , 即没有项目被跳过。事实上, 在这种情况下, 跳过任何事情都是不安全的; 否则, 如果出现第一个真实项目, 算法可能会错过第一个实际项目, 必须对其进行采样。下面, 我们将这种直觉形式化, 并证明算法 ?? 不仅在这两种简并情况下是最优的, 而且在所有情况下都是最优的, 即它是实例最优的。

**THEOREM 3.3.** *For any input stream  $S$  of  $N$  elements, any algorithm that can maintain a uniform sample of size  $k$  over all real elements must run in  $\Omega\left(\sum_{i=1}^N \min\{1, \frac{k}{r_i+1}\}\right)$  expected time.*

PROOF. 考虑任意输入流  $S$  和任意  $i \in [N]$ 。任何在时间戳  $i$  处保持真实元素的均匀样本的正确算法都必须以  $x_i$  的概率 at least  $\min\{1, \frac{k}{r_i+1}\}$  停止。回想一下, 任何算法都无法区分元素是真实的还是虚拟的, 直到它停止 (并检查)。假设  $x_i$  是真实的。如果概率小于  $\min\{1, \frac{k}{r_i+1}\}$ , 则  $x_i$  进入储层的概率必须小于  $\min\{1, \frac{k}{r_i+1}\}$ , 这与该算法可以在时间戳  $i$  返回均匀样本的事实相矛盾。在流中所有实元素上保持大小为  $k$  的统一样本的正确算法在  $1 \leq i \leq N$  的时间戳  $i$  处必须正确。因此, 任何正确的算法都必须止步于  $\sum_{i=1}^N \min\{1, \frac{k}{r_i+1}\}$  预期的数字。  $\square$

虽然算法 ?? 的运行时间在  $O(k \log \frac{N}{k})$  到  $O(N)$  之间可以有很大差异, 但只要流足够密集, 它就更接近前者。

**Definition 3.4 (Dense stream).** Given a stream  $S = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ,  $S$  is  $\phi$ -dense for  $0 < \phi \leq 1$ , if  $r_i \geq \phi \cdot (i - 1)$  for all  $i$ .

结合定理 ?? 和定义 ?? 我们得到:

**COROLLARY 3.5.** *For any  $\phi$ -dense stream where  $\phi$  is a constant, Algorithm ?? runs in  $O(\alpha \cdot k + \gamma \cdot k \log \frac{N}{k})$  expected time.*

我们还提到了密集流的三个重要属性，稍后将用于连接。Lemma ?? implies that straightforwardly concatenating two streams still preserves their minimum density of real items. If one stream only consists of dummy items, it is possible to get a better bound on the density of real items in the whole stream, which is essentially captured by Lemma ?. The more dummy items padded, the sparser the stream becomes. Lemma ?? implies that mixing two streams as their Cartesian product preserves a density that is at least half of their density product. For the ease of notation, we denote  $q_i = r_{i+1}$  (i.e., the number of real items in the first  $i$  items) in the following proofs of Lemma ?, Lemma ?, and Lemma ?. It is easy to see that a stream  $S$  is  $\phi$ -dense if  $q_i \geq \phi \cdot i$  for all  $i$ .

LEMMA 3.6. Given two streams  $S_1 = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$  and  $S_2 = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ , if  $S_1$  is  $\phi_1$ -dense and  $S_2$  is  $\phi_2$ -dense, their concatenation  $S_1 \circ S_2 := \langle x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$  is  $\min\{\phi_1, \phi_2\}$ -dense.

PROOF. 考虑流  $S_1 \circ S_2$ 。由于  $S_1$   $\phi_1$  密集，因此我们为每个  $i \in [1 \dots m]$  都有  $q_i \geq \phi_1 \cdot i$ 。此外， $q_m \geq \phi_1 \cdot m$ 。由于  $S_2$   $\phi_2$  密集，因此我们为每个  $m \leq j \leq m+n$  都有  $q_j - q_m \geq \phi_2 \cdot (j - m)$ 。因此，我们每  $m \leq j \leq m+n$  都会获得

$$q_j \geq \phi_2 \cdot (j - m) + q_m \geq \phi_2 \cdot (j - m) + \phi_1 \cdot m \geq \min\{\phi_1, \phi_2\} \cdot j$$

。再加上  $q_j \geq \phi_1 \cdot j \geq \min\{\phi_1, \phi_2\} \cdot j$  对每个  $j \in [1 \dots m]$  的事实，我们已经证明了每个  $j \in [1 \dots m+n]$   $q_j \geq \min\{\phi_1, \phi_2\} \cdot j$ 。□

LEMMA 3.7. Given two streams  $S_1 = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$  and  $S_2 = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ , if  $S_1$  is  $\phi_1$ -dense and  $S_2$  is  $\phi_2$ -dense, their Cartesian product  $S_1 \times S_2 := \langle (x_1, y_1), \dots, (x_1, y_n), (x_2, y_1), \dots, (x_2, y_n), \dots, (x_m, y_1), \dots, (x_m, y_n) \rangle$  is  $\left(\frac{\phi_1 \phi_2}{2}\right)$ -dense, where  $(x_i, x_j)$  is real if and only if both  $x_i$  and  $x_j$  are real.

PROOF. Consider the stream  $S_1 \times S_2 = \langle z_1, z_2, \dots, z_{mn} \rangle$  and an arbitrary  $1 \leq i \leq mn$ . Assume that  $m > 0$  and  $n > 0$ . Let  $i_1 = \lfloor \frac{i}{n} \rfloor$  and  $i_2 = i - i_1 \cdot n$ . Let  $\langle z_{jn+1}, z_{jn+2}, \dots, z_{jn+n} \rangle$  be the  $row_j$ , where  $j = 0, 1, \dots, i_1 - 1$ . Then  $row_j$  contains at least  $\phi_2 \cdot n$  real items if  $x_{j+1}$  in  $S_1$  is real. Otherwise, all the  $n$  items in  $row_j$  are dummy. Let  $q_i$  be the number of items that are real in the first  $i$  items of the resulted stream. We distinguish the following 2 cases:

- $i_1 = 0$ : 由于  $S_1$  是  $\phi_1$ -稠密的，因此  $S_1$  的第一项必须传递谓词  $\theta$ 。那么在这种情况下， $q_i \geq \phi_2 \cdot i$   $S_2$  是  $\phi_2$  密集的。
- $i_1 > 0$ : 生成的流的前  $i$  项可以表示为  $i_1$  行，后跟  $i_2$  项。在  $i_1$  行中，至少有  $\phi_1 \cdot i_1$  行，每行包含至少  $\phi_2 \cdot n$  个项目，因为  $S_1$   $\phi_1$  密集。总的来说，至少有  $\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot n \cdot i_1$  项目是真实的。作为  $i \leq (i_1 + 1) \cdot n$ ，我们有

$$q_i \geq \frac{\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot n \cdot i_1}{i} \cdot i \geq \frac{\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot n \cdot i_1}{(i_1 + 1) \cdot n} \cdot i \geq \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \frac{i_1}{i_1 + 1} \cdot i \geq \frac{\phi_1 \cdot \phi_2}{2} \cdot i$$

As  $0 < \phi_1 \leq 1$ ,  $q_i \geq \phi_2 \cdot i \geq \frac{\phi_1 \cdot \phi_2}{2} \cdot i$  for the case  $i_1 = 0$ . Putting all together, we have  $q_i \geq \frac{\phi_1 \cdot \phi_2}{2} \cdot i$ 。□

LEMMA 3.8. Given a  $\phi$ -dense stream of size  $m$ , padding  $n$  dummy items at the end yields a  $\left(\frac{m}{m+n} \cdot \phi\right)$ -dense stream.

PROOF. 让  $S, S'$  分别是原始流和结果流。让  $|S| = m$  和  $|S'| = m+n$ ，即在  $S$  的末尾填充  $n$  虚拟项目。它足以证明任何  $m+1 \leq i \leq m+n$   $q_i \geq \phi \cdot \frac{m}{m+n} \cdot i$ 。由于  $S$  是  $\phi$  密集的，我们注意到  $q_m \geq \phi \cdot m$ 。我们有

$$q_i = q_m \geq \phi \cdot m \geq \phi \cdot \frac{m}{m+n} \cdot (m+n) \geq \phi \cdot \frac{m}{m+n} \cdot i \quad \square$$

---

**Algorithm 4:** BATCHRESERVOIR ( $D, k, \theta$ )

---

**Input** : An input stream  $D$  of item-disjoint batches, an integer  $k > 0$ , and a predicate  $\theta$  ;  
**Output**: A set  $S$  maintaining  $k$  random samples without replacement of items on which  $\theta$  evaluates to true;

```
1  $S \leftarrow \emptyset, w \leftarrow +\infty, q \leftarrow 0$  ;  
2 foreach batch  $B \in D$  do  
3    $(S, w, q) \leftarrow \text{BATCHUPDATE}(S, k, B, q, w, \theta)$  ;
```

---

---

**Algorithm 5:** BATCHUPDATE ( $S, k, B, q, w, \theta$ )

---

**Input** : A set  $S$  of random samples, an integer  $k > 0$ , a new batch  $B$  with the first  $q$  items to be skipped, parameter  $w$  and a predicate  $\theta$  ;

**Output**: Updated  $S$ ,  $w$  and  $q$  ;

```
1 while  $|S| < k$  and  $B.\text{remain}() > 0$  do  
2    $x \leftarrow B.\text{next}()$  ;  
3   if  $\theta(x)$  then  $S \leftarrow S \cup \{x\}$  ;  
4 if  $|S| < k$  then return  $S, w, q$  ;  
5 if  $w > 1$  then  
6    $w \leftarrow \text{rand}()^{1/k}$  ;  
7    $q \leftarrow \lfloor (\ln(\text{rand}()) / \ln(1 - w)) \rfloor$  ; (note that  $q \sim \text{Geo}(w)$ )  
8 while  $B.\text{remain}() > q$  do  
9    $x \leftarrow B.\text{skip}(q)$  ;  
10  if  $\theta(x)$  then  
11     $y \leftarrow$  a randomly chosen item from  $S$  ;  
12     $S \leftarrow S - \{y\} + \{x\}$  ;  
13     $w \leftarrow w \cdot \text{rand}()^{1/k}$  ;  
14   $q \leftarrow \lfloor (\ln(\text{rand}()) / \ln(1 - w)) \rfloor$  ; (note that  $q \sim \text{Geo}(w)$ )  
15 return  $S, w, q - B.\text{remain}()$  ;
```

---

### 3.3 使用谓词的批量储层取样

如第 ?? 节所述，每个到达的元组  $t$  都会生成一批新的连接结果  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$ 。为了将我们的储层采样算法应用于连接，我们首先将 Algorithm ?? 改编为批处理版本。从形式上讲，给定一个项目不相交批次的输入流  $\langle B_1, B_2, \dots, B_m \rangle$  和一个谓词  $\theta$ ，目标是保持  $k$  均匀的样本，而不替换每个  $i$  的  $B_1^\theta \cup B_2^\theta \cup \dots \cup B_i^\theta$ ，其中  $B_i^\theta \subseteq B_i$  是批次  $B_i$  中真实项目的集合。

我们的批量储层采样框架在 Algorithm ?? 中描述，它为每个批次调用 BATCHUPDATE (Algorithm ??)。BATCHUPDATE 基本上在给定的批处理  $B$  上运行算法 ??，但它必须防止 skip ( $q$ ) 可能跳出批处理的情况。为此，它需要另一个原语：

- **remain()** 返回批处理中剩余项的数量。

更准确地说，当  $B.\text{remain}() \leq q$  时，我们跳过当前批次中所有剩余的项目，并将  $q - B.\text{remain}()$  作为另一个参数传递给下一批，以便跳过下一批中的前  $q - B.\text{remain}()$  项。详情请见 Algorithm ??。Moreover, we note that parameters  $w, q$  are only initialized once (as line 6-7 in Algorithm ??), i.e., the first time when the reservoir  $S$  is filled with  $k$  items. To ensure this in the batched version, we set  $w$  with  $+\infty$  at the beginning (line 1 of Algorithm ??), so that  $w, q$  will



该操作返回任何给定  $z$  在  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  中位置  $z$  的项目。索引还应该能够返回  $N_B$ ，即批处理的大小。我们进一步维护一个变量  $\text{pos}$ ，以指示检索到的当前项目的位置。然后，可以实现批量储层采样算法所需的三个基元，如下所示：

- **remain()** 返回  $N_B - \text{pos}$ ，其中  $N_B$  是批处理的大小；
- **skip(i)** 增加  $\text{pos } i + 1$ ，并在  $\text{pos}$  (i.e., skips the next  $i$  items and jumps directly to the  $(i + 1)$ -th item) 返回项目；
- **next()** 只是返回 **skip (0)**；

因此，要对任何联接查询  $Q$  应用批处理储层采样，只需说明如何维护线性大小的索引  $\mathcal{L}$ ，该索引可以有效地支持每个  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  的检索操作，以及  $|\Delta Q(\mathcal{R}, t)|$ 。这仍然很难。To get around this difficulty, in Section ?? we devise an approximate solution. Our index  $\mathcal{L}$  will implicitly define a  $\Delta J$  that contains all the join results in  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$ , plus some dummy results. However, we should not sample from these dummy join results, and this is exactly the reason why we must use a reservoir sampling algorithm that supports predicate. We set the predicate  $\theta$  to  $\text{isReal}(\cdot)$ , which filters out the dummy results. We conceptually add some dummy tuples to base relations as well as some dummy partial join results. In this way, a join result is real if and only if all participated tuples are real, and dummy otherwise (i.e., at least one participated tuple or partial join result is dummy). The details of these dummy join results will be clear in Section ?? and Section ??. 最后，我们还将保证每个  $\Delta J$  都是密集的，以便应用定理 ??。

与 [?] 中的算法实际上遵循相同的框架，但他们只是使用了没有谓词的经典储层采样算法。因此，它们必须直接在  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  上使用支持检索操作和大小信息的索引  $\mathcal{L}$ ；请看图 ?? 图。这样的索引需要  $O(N)$  时间来更新，尽管他们使用了一些启发式方法来提高其实际性能。另一方面，我们启用谓词的储层采样算法允许我们使用一个充满虚拟连接结果的  $\mathcal{L}$ ，该结果可以在  $O(\log N)$  时间内更新，如下一节所示。

#### 4 对非循环连接进行采样

我们首先回顾一下无环连接的定义：

*Definition 4.1 (Acyclic Join [?]).* A (natural) join  $Q = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  is  $\alpha$ -acyclic if there exists a tree  $\mathcal{T}$  (called the join tree) such that (1) there is a one-to-one correspondence between the relations in  $\mathcal{E}$  and nodes in  $\mathcal{T}$ ; and (2) for every attribute  $X \in \mathcal{V}$ , the set of nodes in  $\mathcal{T}$  containing  $X$  are connected in  $\mathcal{T}$ .

在本节中，我们提出了一个动态索引，可以实现以下保证：

**THEOREM 4.2.** *Given any acyclic join  $Q$ , an initially empty database  $\mathcal{R}$ , and a stream of  $N$  tuples, we can maintain an index  $\mathcal{L}$  on  $\mathcal{R}$  using  $O(N)$  space while supporting the following operations:*

- (1) 将元组  $t$  添加到  $\mathcal{R}$  后，可以在摊销  $O(\log N)$  时间内更新  $\mathcal{L}$ 。
- (2) 索引隐式定义一个数组  $J \supseteq Q(\mathcal{R})$  其中  $Q(\mathcal{R})$  中的元组是真正的元组，其他元组是虚拟元组。索引可以在  $O(1)$  时间内返回  $|J|$ 。对于任何给定的  $j \in [|J|]$ ，它可以在  $O(\log N)$  时间内返回  $J[j]$ 。此外，对于某些恒定  $0 < \phi \leq 1$ ， $J$  保证  $\phi$  密度。
- (3) 任何  $t \notin \mathcal{R}$  的增量查询  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  也支持上述内容。

此索引（使用上面的操作 (1) 和 (2)）立即求解了更新时间为  $O(\log N)$  且采样时间为  $O(\log N)$  的动态采样连接问题。由于运算 (3) 和密度保证，它还通过插入具有  $\alpha = \gamma = O(\log n)$  和  $\beta = O(1)$  的定理 ?? 来解决储层采样过连接问题。批数为  $m = N$ ，而定理 ?? 中的  $N$ ，对应于现在的连接结果流，变为  $N^{\rho^*}$ 。请注意， $\rho^*$  仅取决于查询，而不取决于输入大小，因此将其视为常量。

**COROLLARY 4.3.** *Given any acyclic join  $Q$ , an initially empty database  $\mathcal{R}$ , a sample size  $k$ , and a stream of  $N$  tuples, Algorithm ?? maintains  $k$  uniform samples without replacement for each  $Q(\mathcal{R}^i)$ , and runs in  $O(N \log N + k \log N \log \frac{N}{k})$  expected time.*

事实上，操作 (2) 可以简化为操作 (3)： $Q(\mathcal{R})$  的  $J$  只是增量查询的所有  $\Delta J$  的串联。 $J$  的大小是所有  $|\Delta J|$  的总和，可以在  $O(1)$  时间轻松维护。只要每个  $\Delta J$  都是密集的，串联的  $J$  仍然是密集的，这是由于引理 ??。从今以后，我们将只关注操作 (1) 和 (3)。

#### 4.1 双表联接

我们首先考虑简单的双表连接  $R_1(X, Y) \bowtie R_2(Y, Z)$ 。对于此查询，索引仅由两个数组  $R_1 \times b$  和  $R_2 \times b$  组成，以及每个  $b \in \text{dom}(Y)$  的大小。The size of two arrays  $R_1 \times b$  and  $R_2 \times b$  is  $|R_1 \times b|$  and  $|R_2 \times b|$  respectively. Summing over all  $b \in \text{dom}(Y)$ , the whole index uses  $O(N)$  space. 然后可以很容易地支持操作 (1)  $O(1)$  时间：我们只需将元组  $t$  添加到  $R_1 \times t.Y$  中（如果  $t \in R_1$ ），或者  $R_2 \times t.Y$ （如果  $t \in R_2$ ）。对于操作 (3)，假设  $t \in R_1$ 。我们设置了  $\Delta J = R_2 \times t$ 。显然， $J$  是 1 密集的，因为没有虚拟元组，并且任何  $J[j]$  都可以在  $O(1)$  的时间内检索。

#### 4.2 3 号线加入

当我们移动到 3 号线连接  $R_1(X, Y) \bowtie R_2(Y, Z) \bowtie R_3(Z, W)$  时，情况变得更加复杂。但是，即使维护一个仅用于查找增量查询大小的索引也很困难：如果有比从头开始计算每个增量查询大小更好的算法，这仍然是一个悬而未决的问题，这需要  $O(N)$  时间。这就是我们需要引入虚拟连接结果的地方。

**索引结构.** 对于每个  $b \in \pi_Y R_1$ ，我们通过四舍五入到最接近的  $\text{cnt}(b)$  2 的幂来保持  $R_1$   $\text{cnt}(b) = |R_1 \times b|$  的  $b$  度，即及其近似  $\tilde{\text{cnt}}(b) = 2^{\lceil \log_2 \text{cnt}(b) \rceil}$  值。同样，我们维护每个  $c \in \pi_Z R_3$  的  $\text{cnt}(c) = |R_3 \times c|$  和  $\tilde{\text{cnt}}(c) = 2^{\lceil \log_2 \text{cnt}(c) \rceil}$ 。请注意， $\tilde{\text{cnt}}(\cdot)$  最多  $O(\log N)$  次更改。

对于每个值  $b \in \pi_Y R_2$ ，我们根据  $c$  的近似度数将  $R_2 \times b$  的元组组织到最多  $\log N$  个桶中，其中  $i$  个桶是

$$\Phi_i(b) = \{(b, c) \in R_2 : \tilde{\text{cnt}}(c) = 2^i\}.$$

让  $\mathcal{L}_b$  成为非空存储桶的列表。定义  $\varphi_i(b) = 2^i \cdot |\Phi_i(b)|$ 。我们还维护每个值  $b \in \pi_Y R_2$  的  $N_b = \sum_{i \in [\log N]} \varphi_i(b)$ ，如果将一些元组  $(a, b)$  添加到  $R_1$  中，则该值是新连接结果数量的上限。对称地，对于每个  $c \in \pi_Z R_2$ ，我们维护这样一个列表  $\mathcal{L}_c$ ，并  $N_c = \sum_{i \in [\log N]} \varphi_i(c)$ 。示例请参见图 ??。

**空间使用情况.** As there are  $O(N)$  values in  $\pi_Y R_1$ , we need to maintain  $O(N)$  degrees and their approximations in total. For each  $b \in \pi_Y R_2$ , it needs to organize the tuples  $R_2 \times b$  into buckets and maintain a value  $N_b$ . The size of non-empty buckets maintained for  $b$  is essentially  $|R_2 \times b|$ . Summing over all values  $b \in \pi_Y R_2$ , the total size is  $O(N)$ . Similar argument applies to  $\pi_Z R_2$ .

**指数更新.** 元组  $t$  到来后，我们更新数据结构如下。如果  $t \in R_2$ ，比如说  $t = (b, c)$ ，我们  $i = \log_2 \tilde{\text{cnt}}(c)$  的  $\Phi_i(b)$  中添加  $(b, c)$ 。这需要  $O(1)$  时间。

如果  $t = (a, b) \in R_1$  ( $t \in R_3$  情况类似)，我们会将  $\text{cnt}(b)$  增加 1，并在需要时更新  $\tilde{\text{cnt}}(b)$ 。如果  $\tilde{\text{cnt}}(b)$  发生了变化，则对于每个  $c \in \pi_Z (R_2 \times b)$ ，我们从  $\Phi_{i-1}(c)$  中删除  $(b, c)$ ，并将  $(b, c)$  添加到  $\Phi_i(c)$  中，其中  $i = \log_2 \tilde{\text{cnt}}(b)$ 。这可能需要  $O(N)$  时间，但此更新仅在  $\tilde{\text{cnt}}(b)$  翻倍时触发，最多  $O(\log N)$  次。因此，总更新成本为

$$\sum_b \lceil \log \text{cnt}(b) \rceil \cdot |\pi_Z (R_2 \times b)| \leq \log N \cdot \sum_b |\pi_Z (R_2 \times b)| \leq N \log N,$$

，即摊销的更新成本为  $O(\log N)$ 。最后，每当某些  $\Phi_i(b)$  或  $\Phi_i(c)$  发生变化时，我们都会相应地更新  $N_b$  和  $N_c$ 。此更新的时间与  $\Phi_i(b)$  和  $\Phi_i(c)$  的时间相同。

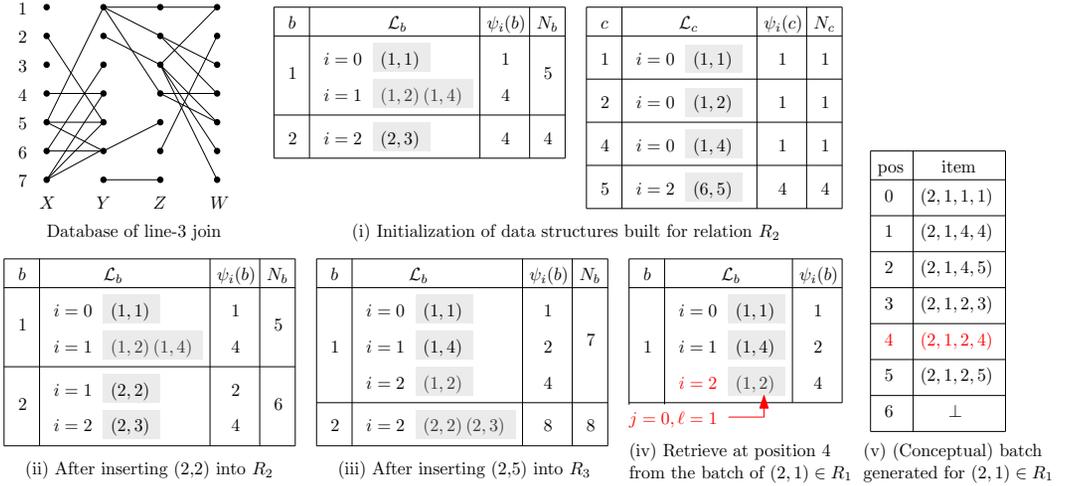


Fig. 2. 为第3行连接  $R_1(X, Y) \bowtie R_2(Y, Z) \bowtie R_3(Z, W)$  构建的索引结构图示。

**批量生成.** 第3行联接上的增量查询  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  属于以下3种情况：

$$\Delta Q(\mathcal{R}, t) = \begin{cases} \{t\} \times (R_3 \times (R_2 \times b)) & \text{if } t = (a, b) \in R_1 \\ (R_1 \times b) \times \{t\} \times (R_3 \times c) & \text{if } t = (b, c) \in R_2 \\ (R_1 \times (R_2 \times c)) \times \{t\} & \text{if } t = (c, d) \in R_3 \end{cases}$$

任何  $t$  的批  $\Delta J \supseteq \Delta Q(\mathcal{R}, t)$  定义如下。如果  $t \in R_2$ ，则说  $t = (b, c)$ ，则  $\Delta J := (R_1 \times b) \times (R_3 \times c)$ 。这批是1密集和  $|\Delta J| = \text{cnt}(b) \cdot \text{cnt}(c)$ 。

接下来，考虑  $t = (a, b) \in R_1$  的情况。考虑一个存储桶  $\langle i, \Phi_i(b) \rangle \in \mathcal{L}_b$ 。对于每个  $(b, c) \in \Phi_i(b)$ ，定义一个由  $R_3 \times c$  中的所有元组组成的小批处理，后跟  $\text{cnt}(c) - \text{cnt}(c)$  虚拟元组。我们将这些小批量连接起来，形成存储桶的批处理，并将所有存储桶连接起来，形成  $\Delta J$ 。这个  $\Delta J$  是  $\frac{1}{2}$ -dense 的，因为每个小批量都是  $\frac{1}{2}$ -dense 的，然后我们调用 Lemma ??。此外， $|\Delta J| = N_b$ ，可以及时  $O(1)$  退货。 $t \in R_3$  的情况与此类似。

**取回.** 接下来，我们将展示如何从上面定义的  $\Delta J$  中检索特定元素。我们分别考虑  $t \in R_2$  和  $t \in R_1$  两种情况 ( $t \in R_3$  相似)。

如果  $t = (b, c) \in R_2$ ， $\Delta J$  是  $R_2 \times b$  和  $R_3 \times c$  的笛卡尔乘积。给定一个位置  $z \in [|\Delta J|]$ ，我们首先找到唯一对  $(z_1, z_2) \in [R_2 \times b] \times [R_3 \times c]$  使得  $z = z_1 \cdot |R_3 \times c| + z_2$ 。然后，我们只返回  $R_2 \times b$  中位置  $z_1$  处的元组和  $R_3 \times c$  中位置  $z_2$  处的元组的组合。在这种情况下，检索操作需要  $O(1)$  时间。

如果  $t = (a, b) \in R_1$ ，我们检索位置  $z$  处的元组，如下所示：

- 设  $i \in [0, \log N]$  是唯一一整数，使得

$$\sum_{i' \leq i-1: \Phi_{i'}(b) \neq \emptyset} \varphi_{i'}(b) < z + 1 \leq \sum_{i' \leq i: \Phi_{i'}(b) \neq \emptyset} \varphi_{i'}(b).$$

- 设置  $j = \left\lfloor (z - \sum_{i' \leq i-1: \Phi_{i'}(b) \neq \emptyset} \varphi_{i'}(b)) / 2^i \right\rfloor$ 。

- 设置  $\ell = z - \sum_{i' \leq i-1: \Phi_{i'}(b) \neq \emptyset} \varphi_{i'}(b) - 2^i \cdot j$ 。

设  $t'$  是  $\Phi_i(b)$  中位置  $j$  的元组。然后，如果  $\ell < |R_3 \times t'|$ ，则返回位置  $\ell$  的元组，否则返回  $R_3 \times t'$  中的虚拟元组。由于  $\Phi_i(b) \neq \emptyset$  最多有  $O(\log N)$  不同的  $i$ ，因此  $i, j, \ell$  的值可以在  $O(\log N)$  的时间内计算出来。因此，在这种情况下，检索操作需要  $O(\log N)$  时间。

### 4.3 非循环连接

最后，我们将 line-3 算法推广为任意非循环连接  $Q = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 。让  $\mathcal{T}$  成为任何  $Q$  的连接树。回想一下， $\mathcal{T}$  中的节点和  $\mathcal{E}$  中的关系之间存在一对一的对应关系。此外，对于每个属性  $X \in \mathcal{V}$ ，所有包含  $X$  的节点都以  $\mathcal{T}$  连接。根据定义， $\mathcal{T}$  是一棵无根树，但我们可以通过将任何节点指定为根  $r$  来根它。我们将考虑  $R$  范围在所有节点上的所有根树，具有根  $r$  的树将负责为任何  $t \in R_r$  生成批处理  $\Delta J \supseteq \Delta Q(\mathcal{R}, t)$ 。例如，第 3 行连接具有一个无根连接树  $R_1 - R_2 - R_3$  但有 3 个有根树。行 3 算法在概念上可以看作是 3 种算法，每种算法都使用一棵根树。它们中的一些数据结构可以共享，但为了概念上的简单性，下面我们将只关注一个根树。

考虑一个植根于  $r$  的  $\mathcal{T}$ 。我们用  $p_e$  来表示  $e$  的父级。对于根  $r$ ，设置  $p_r = \emptyset$ 。让  $\text{key}(e) = e \cap p_e$  成为  $e$  与其父  $p_e$  之间共享的共同属性。设  $C_e$  是节点  $e$  的子节点。对于叶节点  $e$ ， $C_e = \emptyset$ 。设  $\mathcal{T}_e$  是  $e$  下面的子树。由于略微滥用符号，我们还使用  $\mathcal{T}_e$  来表示其对应节点在  $\mathcal{T}_e$  中的关系集。

**索引结构。** 我们将输入元组存储在哈希表中，以便对于任何  $e \in \mathcal{E}$ ，属性  $x \subseteq e$  的子集和一个元组  $t \in \text{dom}(x)$ ，我们可以得到  $O(1)$  时间  $R_e \times t$  元组的列表。对于每个节点  $e \in \mathcal{T}$  和元组  $t \in \pi_{\text{key}(e)} R_e$ ，我们在  $\mathcal{T}_e$  中  $t$  的度上保持一个上限  $\text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$ ，即  $\mathcal{T}_e$  中关系上的连接结果的数量，这些关系的投影到属性  $\text{key}(e)$  匹配  $t$ ：

$$\text{cnt}[\mathcal{T}, e, t] = \begin{cases} |R_e \times t| & \text{if } e \text{ is a leaf} \\ \sum_{t' \in R_e \times t} \prod_{e' \in C_e} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e', \pi_{\text{key}(e')} t'] & \text{otherwise} \end{cases}$$

请注意，此定义取决于  $\tilde{\text{cnt}}(\cdot)$ ，通过将  $\text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$  四舍五入到最接近的 2 次幂，递归定义为  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t] = 2^{\lceil \log_2 \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t] \rceil}$ 。我们指出了引理 ?? 中  $\tilde{\text{cnt}}(\cdot)$  的一个重要性质，表明  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t]$  是  $\mathcal{T}_e$  中  $t$  度的常数近似。

LEMMA 4.4. For a join tree  $\mathcal{T}$ , node  $e$  and tuple  $t \in \pi_{\text{key}(e)} R_e$ ,  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t] \leq 2^{|\mathcal{T}_e|} \cdot |(\times_{e' \in \mathcal{T}_e} R_{e'}) \times t|$ .

PROOF. 我们通过归纳法来证明这一点。如果  $e$  是叶节点，则  $\text{cnt}[\mathcal{T}, e, t] = |R_e \times t|$ 。作为  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t] \leq 2 \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$ ，我们有  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t] \leq 2 \cdot |R_e \times t|$ 。如果  $e$  是一个内部节点，我们假设引理适用于每个子节点  $e' \in C_e$  和元组  $t' \in \pi_{\text{key}(e')} R_{e'}$ 。对于任意元组  $t \in \pi_{\text{key}(e)} R_e$ ，我们可以  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t]$  绑定为

$$\begin{aligned} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t] &\leq 2 \cdot \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t] = 2 \cdot \sum_{t' \in R_e \times t} \prod_{e' \in C_e} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e', \pi_{\text{key}(e')} t'] \\ &\leq 2 \cdot \sum_{t' \in R_e \times t} \prod_{e' \in C_e} 2^{|\mathcal{T}_{e'}|} \cdot |(\times_{e'' \in \mathcal{T}_{e'}} R_{e''}) \times (\pi_{\text{key}(e')} t')| \\ &= 2 \cdot 2^{|\mathcal{T}_e| - 1} \cdot |(\times_{e' \in \mathcal{T}_e} R_{e'}) \times t| \end{aligned}$$

其中最后一个等式遵循  $\mathcal{T}$  的交集属性。  $\square$

再加上  $|(\times_{e' \in \mathcal{T}_e} R_{e'}) \times t| \leq |\times_{e' \in \mathcal{T}_e} R_{e'}| \leq N^{|\mathcal{T}_e|}$ ，我们得到  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t] \leq (2N)^{|\mathcal{T}_e|}$ ，这意味着  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t]$  最多只能翻倍  $O(\log N)$  倍。

---

**Algorithm 7:** INDEXUPDATE( $\mathcal{T}, e, t, \text{old}$ )

---

**Input** : A join tree  $\mathcal{T}$  for  $Q$ , a node  $e$  and tuple  $t \in R_e$ , an approximate degree  $\text{old}$  of  $t$  in  $\mathcal{T}_e$  before update;

**Output:** Updated  $\text{cnt}(\cdot)$  and  $\tilde{\text{cnt}}(\cdot)$ ;

```
1  $t_e \leftarrow \pi_{\text{key}(e)} t$ ;
2  $\text{new} \leftarrow \prod_{e' \in C_e} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e', \pi_{\text{key}(e')} t]$ ;
3  $i' \leftarrow \log_2 \text{old}$  and  $i \leftarrow \log_2 \text{new}$ ;
4 if  $i' > 0$  then  $\Phi_{i',e}(t_e) \leftarrow \Phi_{i',e}(t_e) - \{t\}$ ;
5  $\Phi_{i,e}(t_e) \leftarrow \Phi_{i,e}(t_e) \cup \{t\}$ ;
6  $j \leftarrow 2^{\lceil \log \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t_e] \rceil}$ ;
7  $\text{cnt}[\mathcal{T}, e, t_e] \leftarrow \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t_e] + \text{new} - \text{old}$ ;
8 if  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t_e]$  changes and  $p_e$  is not the root then
9   foreach  $t' \in R_{p_e} \times t_e$  do
10      $\text{old}' \leftarrow j \cdot \prod_{e' \in C_{p_e} - \{e\}} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e', \pi_{\text{key}(e')} t']$ ;
11     INDEXUPDATE( $\mathcal{T}, p_e, t', \text{old}'$ );
```

---

考虑任何非根节点  $e$ 。对于每个元组  $t \in \pi_{\text{key}(e)} R_e$ ，我们根据  $\mathcal{T}_e$  中的近似  $t'$  度将  $t' \in R_e \times t$  元组组织到最多  $|\mathcal{T}_e| \cdot \log 2N$  个桶中，其中  $i$  个桶是

$$\Phi_{i,e}(t) = \left\{ t' \in R_e \times t : \prod_{e' \in C_e} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e', \pi_{\text{key}(e')} t'] = 2^i \right\}.$$

让  $\mathcal{L}_{e,t}$  成为非空桶的列表。为简单起见，我们表示每个  $i \in [|\mathcal{T}_e| \cdot \log 2N]$  的  $\varphi_{i,e}(t) = 2^i \cdot |\Phi_{i,e}(t)|$ 。我们还维护每个  $t \in \pi_{\text{key}(e)} R_e$  的  $N_t = \sum_{i \in [|\mathcal{T}_e| \cdot \log 2N]} \varphi_{i,e}(t)$ 。

**Space Usage** . We consider an arbitrary  $e \in \mathcal{E}$  in an arbitrary join tree maintained. Let  $C_e$  be the children of  $R_e$ . We build an index on  $R_e$  with  $\text{key}(e_i)$  as the key for each  $e_i \in C_e$  in order to perform the look up in line 9 of Algorithm ?? . There are  $|C_e|$  such indices of size  $O(N)$  in total. Moreover, for any non-root node  $e$  and each tuple  $t \in \pi_{\text{key}(e)} R_e$ , we organize tuples  $R_e \times t$  into buckets and maintain  $N_t$ . All these buckets are disjoint and the total size is  $O(N)$ . As there are  $O(1)$  join trees and each join tree contains  $O(1)$  nodes, the whole index uses  $O(N)$  space.

**指数更新**. 我们定义了一个更新索引的通用程序。如 Algorithm ?? 中所述，该过程 INDEXUPDATE 将连接树  $\mathcal{T}$ 、节点  $e$ 、元组  $t \in R_e$  和整数  $\text{old} \geq 0$  作为输入（表示更新前  $\mathcal{T}_e$   $t$  的近似程度）。更新以递归方式进行。我们首先计算更新后  $\mathcal{T}_e$  的近似  $t$  度，表示为  $\text{new}$ 。为简单起见，请表示  $t_e = \pi_{\text{key}(e)} t$ 。然后，如果存在旧桶，我们将  $t$  从旧桶中删除（第 4 行），并将  $t$  插入新桶（第 5 行）。我们将  $\text{cnt}[\mathcal{T}, e, t_e]$  增加  $\text{new} - \text{old}$ （第 7 行），并在需要时更新  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t_e]$ 。如果  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t_e]$  发生了变化，我们可能需要向上传播更新（第 8-11 行）。此外，如果  $p_e$  不是根，则对于每个元组  $t' \in R_{p_e} \times t_e$ ，我们在更新之前计算  $\mathcal{T}_{p_e}$ （第 10 行）中近似的  $t'$  度，表示为  $\text{old}'$  并递归调用整个过程（第 11 行）。

当元组  $t$  插入到  $R_e$  中时，我们只需为索引中使用的每个连接树  $\mathcal{T}$  调用 INDEXUPDATE( $\mathcal{T}, e, t, 0$ )。这可能需要  $O(N)$  时间，但观察结果是，此更新仅在  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t_e]$  更改时触发，这最多发生  $O(\log N)$  次。因此，总更新成本为：

$$\sum_{e \in \mathcal{T}} \sum_{t \in \pi_{\text{key}(e)} R_e} \log N \cdot |R_{p_e} \times t| \leq \log N \cdot \sum_{e \in \mathcal{T}} \sum_{t \in \pi_{\text{key}(e)} R_e} |R_{p_e} \times t|$$

---

**Algorithm 8:** BATCHGENERATE( $\mathcal{T}, e, t$ )

---

**Input** : A join tree  $\mathcal{T}$  for  $Q$ , a node  $e$  and a tuple  $t \in R_e$  or  $t \in \pi_{\text{key}(e)}R_e$ ;

**Output:** A  $O(1)$ -dense batch  $\Delta J \supseteq \Delta Q(\mathcal{R}, t)$ ;

```
1  $x \leftarrow \text{supp}(t)$ ;
2 if  $e$  is a leaf node and  $x = e$  then return  $t$ ;
3 if  $e$  is an internal node and  $x = e$  then
4   foreach  $e_i \in C_e$  do
5      $B_i \leftarrow \text{BatchGenerate}(\mathcal{T}, e_i, \pi_{\text{key}(e_i)}t)$ ;
6   return  $\{t\} \times (\times_{e_i \in C_e} B_i)$ ;
7 for  $t' \in R_e \times t$  do  $B_{t'} \leftarrow \text{BatchGenerate}(\mathcal{T}, e, t')$ ;
8  $L \leftarrow \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t] - \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$  dummy elements;
9 return concatenation of  $B_{t'}$  for  $t' \in R_e \times t$ , followed by  $L$ ;
```

---

$$\leq \log N \cdot \sum_{e' \in \mathcal{T}: e' \text{ is an internal node}} |R_{e'}| \cdot |C_{e'}| = O(N \log N).$$

每当某些  $\Phi_{i,e}(t)$  发生变化时, 我们都会相应地更新  $N_t$ 。此更新的时间与更新  $\Phi_{i,e}(t)$  的时间相同。最后, 将所有使用的连接树相加, 每个连接树都具有不同的关系作为其根, 总更新成本为  $O(N \log N)$ , 即摊销更新成本为  $O(\log N)$ 。

**批量生成。** 我们定义了一个通用过程, 用于为任何元组  $t \in R_e$  或  $t \in \pi_{\text{key}(e)}R_e$  生成  $\Omega(1)$  密集批处理  $\Delta J \supseteq \Delta Q(\mathcal{R}, t)$ , 如 Algorithm ?? 中所述。密度将取决于查询大小 (查询大小被视为常量), 但不取决于数据大小。如果将元组  $t$  插入到  $R_e$  中, 则第一个调用是 BATCHGENERATE( $\mathcal{T}, e, t$ ), 其中  $\mathcal{T}$  是根植于节点  $e$  的连接树。在每次递归调用中, Algorithm ?? 区分三种情况:

- **Case 1:**  $e$  是一个叶节点,  $t \in R_e$ 。我们只是  $t$  返回  $\Delta J$ 。这批是 1 密集和  $|\Delta J| = 1$ 。
- **Case 2:**  $e$  是一个内部节点,  $t \in R_e$ 。在这种情况下,  $\Delta Q(\mathcal{R}, t)$  可以分解为每个子  $e_i \in C_e$  的笛卡尔  $\Delta Q(\mathcal{R}, \pi_{\text{key}(e_i)}t)$  积。批处理  $\Delta J$  也遵循相同的方式。我们递归地为每个  $e_i \in e$  生成一个批次, 用于  $\mathcal{T}_{e_i} \pi_{\text{key}(e_i)}t$ , 并返回它们的叉积作为  $\Delta J$ 。
- **Case 3:**  $t \in \pi_{\text{key}(e)}R_e$ 。我们递归地为  $\mathcal{T}_e$  中的每个元组  $t' \in R_e \times t$  生成一个批处理, 并将这些批处理与末尾的  $\text{cnt}[\mathcal{T}, e, t] - \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$  虚拟元素连接起来, 如  $\Delta J$ 。

通过归纳可以很容易地表明

$$|\Delta J| = \begin{cases} \prod_{e_i \in C_e} \text{cnt}[\mathcal{T}, e_i, \pi_{\text{key}(e_i)}t] & \text{if } t \in R_e \\ \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t] & \text{if } t \in \pi_{\text{key}(e)}R_e \end{cases}$$

第二种情况遵循  $\text{cnt}(\cdot)$ 。因此,  $|\Delta J|$  可以在  $O(1)$  时间归还。接下来, 我们通过归纳法证明

$$\Delta J \text{ is } \phi\text{-dense, where } \phi = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{2 \cdot |\mathcal{T}_e| - 1} & \text{if } t \in \pi_{\text{key}(e)}R_e \\ (\frac{1}{2})^{2 \cdot |\mathcal{T}_e| - 2} & \text{if } t \in R_e \end{cases}$$

这对 **案例 1** 来说微不足道。对于 **案例 2**, 我们假设为元组  $\pi_{\text{key}(e_i)}t$  生成的批处理是  $(\frac{1}{2})^{2 \cdot |\mathcal{T}_{e_i}| - 1}$ -dense 的。由 Lemma ?? 暗示, 这个  $\Delta J$  是  $(\frac{1}{2})^{2 \cdot |\mathcal{T}_e| - 2}$ -dense 的, 因为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|e|-1} \cdot \prod_{e_i \in e} \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot |\mathcal{T}_{e_i}| - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot |\mathcal{T}_e| - 3} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot |\mathcal{T}_e| - 2}$$

---

**Algorithm 9:** RETRIEVE( $\mathcal{T}, e, t, z$ )

---

**Input** : A join tree  $\mathcal{T}$  for  $Q$ , a node  $e$  and a tuple  $t \in R_e$  or  $t \in \pi_{\text{key}(e)}R_e$ , an integer  $z \geq 0$ ;

**Output:** The element at position  $z$  in the batch generated for  $t$  by BATCHGENERATE( $\mathcal{T}, e, t$ );

```
1  $x \leftarrow \text{supp}(t)$ ;
2 if  $e$  is a leaf node then
3   if  $z \geq \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$  then return  $\perp$ ;
4   else return the element at position  $z$  in  $R_e \times t$ ;
5 if  $e = x$  then
6    $C_e \leftarrow \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ;
7   foreach  $i \in [1 \dots m]$  do  $t_i \leftarrow \pi_{\text{key}(e_i)}t$ ;
8   Find  $(z_1, z_2, \dots, z_m) \in \times_{i=1}^m \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e_i, t_i]$  such that  $z = \sum_{i \in [1 \dots m]} \left( z_i \cdot \prod_{j>i} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e_j, t_j] \right)$ ;
9   foreach  $i \in [1 \dots m]$  do
10     $t'_i \leftarrow \text{RETRIEVE}(\mathcal{T}, e_i, t_i, z_i)$ ;
11    if  $t'_i = \perp$  then return  $\perp$ ;
12  return  $(t'_1, t'_2, \dots, t'_m)$ ;
13 else
14  if  $z \geq \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$  then return  $\perp$ ;
15  Find  $i$  such that  $\sum_{i' \leq i-1} \varphi_{i', e}(t) < z + 1 \leq \sum_{i' \leq i} \varphi_{i', e}(t)$ ;
16   $j \leftarrow \left\lfloor \left( z - \sum_{i' \leq i-1} \varphi_{i', e}(t) \right) / 2^i \right\rfloor$ ;
17   $\ell \leftarrow z - \sum_{i' \leq i-1} \varphi_{i', e}(t) - 2^i \cdot j$ ;
18   $t' \leftarrow$  the element at position  $j$  in  $\Phi_{i, e}(t)$ ;
19  return RETRIEVE( $\mathcal{T}, e, t', \ell$ );
```

---

对于 **案例 3**，我们假设为每个元组  $t' \in R_e \times t$  生成的批处理是  $(\frac{1}{2})^{2 \cdot |\mathcal{T}_e| - 2}$ -dense 的。它们的串联也是  $(\frac{1}{2})^{2 \cdot |\mathcal{T}_e| - 2}$  密集的，由 Lemma ?? 暗示。 $\Delta J$  是  $(\frac{1}{2})^{2 \cdot |\mathcal{T}_e| - 1}$ -密集的，因为  $\text{cnt}[\mathcal{T}, e, t] \geq \frac{1}{2} \cdot \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t]$  然后我们调用引理 ??。

**Retrieve.** 最后，我们描述了如何检索 BATCHGENERATE 生成的批处理中位置  $z$  处的连接结果。如 Algorithm ?? 中所述，RETRIEVE 遵循与 BATCHGENERATE 相同的递归结构。如果将元组  $t$  插入到  $R_e$  中，则第一个调用是 RETRIEVE( $\mathcal{T}, e, t, z$ )，其中  $\mathcal{T}$  是根植于节点  $e$  的连接树。在每个递归调用中，我们还区分了三种情况：

- **Case 1:**  $e$  是一个叶节点。我们只需相应地返回批处理中位置  $z$  处的元素。这需要  $O(1)$  时间。
- **Case 2:**  $e$  是一个内部节点， $t \in R_e$ 。在这种情况下，我们将索引  $z$  分解为第 8 行中定义的  $m$  坐标  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ ，然后以递归方式（第 9 行）检索为每个  $e_i \in C_e$  的元组  $\pi_{\text{key}(e_i)}t$  生成的批处理中位置  $z_i$  处的元素，并返回它们的组合作为最终结果（第 12 行）。 $z_1, z_2, \dots, z_m$  的值可以在  $O(1)$  的时间内计算出来。
- **Case 3:**  $e$  是一个内部节点， $t \in \pi_{\text{key}(e)}R_e$ 。在这种情况下，我们首先找到位置  $z$  的元素落入的桶，比如  $i$ 。然后，我们找到其批处理包含位置  $z$  的元素的元组的索引，比如  $j$ ，并找

---

**Algorithm 10:** INDEXUPDATEGROUPING( $\mathcal{T}, e, t, \text{old}$ )

---

**Input** : A join tree  $\mathcal{T}$  for  $Q$ , a node  $e$  and tuple  $t \in R_e$ , an approximate degree  $\text{old}$  of  $t$  in  $\mathcal{T}_e$  before update;

**Output:** Updated  $\text{cnt}(\cdot)$  and  $\tilde{\text{cnt}}(\cdot)$ ;

```
1  $t_e \leftarrow \pi_{\text{key}(e)} t$ ;
2  $f \leftarrow 1$ ;
3 if  $e$  is created by grouping then  $f \leftarrow \tilde{\text{feq}}[\mathcal{T}, e, t]$ ;
4  $\text{new} \leftarrow f \cdot \prod_{e' \in C_e} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e', \pi_{\text{key}(e')} t]$ ;
5  $i' \leftarrow \log_2 \text{old}$  and  $i \leftarrow \log_2 \text{new}$ ;
6 if  $i' > 0$  then  $\Phi_{i',e}(t_e) \leftarrow \Phi_{i',e}(t_e) - \{t\}$ ;
7  $\Phi_{i,e}(t_e) \leftarrow \Phi_{i,e}(t_e) \cup \{t\}$ ;
8  $j \leftarrow \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t_e]$ ;
9  $\text{cnt}[\mathcal{T}, e, t_e] \leftarrow \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t_e] + \text{new} - \text{old}$ ;
10 if  $\tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e, t_e]$  changes and  $p_e$  is not the root then
11   foreach  $t' \in R_{p_e} \times t_e$  do
12      $f' \leftarrow 1$ ;
13     if  $p_e$  is created by grouping then  $f' \leftarrow \tilde{\text{feq}}[\mathcal{T}, p_e, t']$ ;
14      $\text{old}' \leftarrow j \cdot f' \cdot \prod_{e' \in C_{p_e} - \{e\}} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e', \pi_{\text{key}(e')} t']$ ;
15     INDEXUPDATE( $\mathcal{T}, p_e, t', \text{old}'$ );
```

---

到特定的元组  $t'$ 。我们还需要计算为  $t'$  生成的批处理中目标元素的索引，比如  $\ell$ 。最后，可以通过  $\text{RETRIEVE}(\mathcal{T}, e, t', \ell)$  找到为  $t$  生成的批处理中位置  $z$  处的元素。 $i, j, \ell$  的值可以在  $O(\log N)$  的时间内计算出来。

通过对每次递归调用的时间成本求和，不难看出检索操作需要  $O(\log N)$  时间。

#### 4.4 优化

接下来，我们将讨论算法的一些优化技术。虽然它们不能改善复杂度结果，但它们显著降低了常数因子，如第 ?? 节所示。

**分组.** 在连接树  $\mathcal{T}$  中，对于非根内部节点  $R_e$  其子节点  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ，让  $\bar{e} = \text{key}(e) \cup \text{key}(e_1) \cup \dots \cup \text{key}(e_m)$  表示连接属性。我们可以按属性  $\bar{e}$   $R_e$  组元组，如果  $e - \bar{e} \neq \emptyset$ 。让  $R_{\bar{e}} = \pi_{\bar{e}} R_e$ 。我们在  $\mathcal{T}$  中用  $\bar{e}$  替换  $e$ 。对于每个元组  $t \in R_{\bar{e}}$ ，我们保持  $\text{feq}[\mathcal{T}, \bar{e}, t] = |R_e \times t|$  和  $\tilde{\text{feq}}[\mathcal{T}, \bar{e}, t] = 2^{\lceil \log_2 \text{feq}[\mathcal{T}, \bar{e}, t] \rceil}$ 。然后， $\text{cnt}[\mathcal{T}, \bar{e}, t]$  定义为：

$$\text{cnt}[\mathcal{T}, \bar{e}, t] = \sum_{t' \in R_{\bar{e}} \times t} \tilde{\text{feq}}[\mathcal{T}, \bar{e}, t'] \cdot \prod_{e_i \in \bar{e}} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e_i, \pi_{\text{key}(e_i)} t']$$

更新和检索过程的分组版本在 Algorithm ?? 和 Algorithm ?? 中进行了描述。对于插入到  $R_e$  中的元组  $t_e$ ，如果  $e - \bar{e} \neq \emptyset$ ，我们首先计算  $t_{\bar{e}} = \pi_{\bar{e}} t$ ，然后计算

$$\text{old} = \tilde{\text{feq}}[\mathcal{T}, \bar{e}, t_{\bar{e}}] \cdot \prod_{w \in C_e} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, w, \pi_{\text{key}(w)} t_e]$$

我们将  $\text{feq}[\mathcal{T}, \bar{e}, t_{\bar{e}}]$  增加 1 并相应地更新  $\tilde{\text{feq}}[\mathcal{T}, \bar{e}, t_{\bar{e}}]$ 。最后，如果  $\tilde{\text{feq}}[\mathcal{T}, \bar{e}, t_{\bar{e}}]$  更改，我们将调用  $\text{INDEXUPDATEGROUPING}(\mathcal{T}, \bar{e}, t_{\bar{e}}, \text{old})$  以递归方式处理传播的更新。分组可以在索引更新中带来很多好处。更具体地说，在 Algorithm ?? 的第 9-11 行中，我们现在只为每个元组

---

**Algorithm 11:** RETRIEVEWITHGROUPING( $\mathcal{T}, e, t, z$ )

---

**Input** : A join tree  $\mathcal{T}$ , a node  $e$  and some tuple  $t \in R_e$  or  $t \in \pi_{\text{key}(e)}R_e$ , an integer  $z \geq 0$ ;

**Output:** The element at position  $z$  in the batch generated for  $t$  by BATCHGENERATE( $\mathcal{T}, e, t$ );

```
1  $x \leftarrow \text{supp}(t)$ ;
2 if  $e$  is a leaf node then
3   if  $z \geq \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$  then return  $\perp$ ;
4   else return the element at position  $z$  in  $R_e \times t$ ;
5 if  $e = x$  then
6    $C_e \leftarrow \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ;
7   foreach  $i \in [1 \dots m]$  do  $t_i \leftarrow \pi_{\text{key}(e_i)}t$ ;
8   Find  $(z_1, z_2, \dots, z_m) \in \times_{i=1}^m \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e_i, t_i]$  such that  $z = \sum_{i \in [1 \dots m]} \left( z_i \cdot \prod_{j>i} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e_j, t_j] \right)$ ;
9   foreach  $i \in [1 \dots m]$  do
10     $t'_i \leftarrow \text{RETRIEVEWITHGROUPING}(\mathcal{T}, e_i, t_i, z_i)$ ;
11    if  $t'_i = \perp$  then return  $\perp$ ;
12  return  $(t'_1, t'_2, \dots, t'_m)$ ;
13 else if  $e$  is created from  $e'$  by grouping then
14   if  $z \geq \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$  then return  $\perp$ ;
15   Find  $i$  such that  $\sum_{i' \leq i-1} \varphi_{i',e}(t) < z + 1 \leq \sum_{i' \leq i} \varphi_{i',e}(t)$ ;
16    $j \leftarrow \left\lfloor \left( z - \sum_{i' \leq i-1} \varphi_{i',e}(t) \right) / 2^i \right\rfloor$ ;
17    $\ell \leftarrow z - \sum_{i' \leq i-1} \varphi_{i',e}(t) - 2^i \cdot j$ ;
18    $t' \leftarrow$  the element at position  $j$  in  $\Phi_{i,e}(t)$ ;
19    $h \leftarrow \prod_{e_i \in C_e} \tilde{\text{cnt}}[\mathcal{T}, e_i, \pi_{\text{key}(e_i)}t']$ ;
20   if  $\lfloor \ell/h \rfloor \geq \text{freq}[\mathcal{T}, e, t']$  then return  $\perp$ ;
21    $f \leftarrow \ell - \lfloor \ell/h \rfloor \cdot h$ ;
22    $t'' \leftarrow$  the element at position  $\lfloor \ell/h \rfloor$  in  $R_{e'} \times t'$ ;
23   return  $\text{RETRIEVEWITHGROUPING}(\mathcal{T}, e, t'', f)$ ;
24 else
25   if  $z \geq \text{cnt}[\mathcal{T}, e, t]$  then return  $\perp$ ;
26   Find  $i$  such that  $\sum_{i' \leq i-1} \varphi_{i',e}(t) < z + 1 \leq \sum_{i' \leq i} \varphi_{i',e}(t)$ ;
27    $j \leftarrow \left\lfloor \left( z - \sum_{i' \leq i-1} \varphi_{i',e}(t) \right) / 2^i \right\rfloor$ ;
28    $\ell \leftarrow z - \sum_{i' \leq i-1} \varphi_{i',e}(t) - 2^i \cdot j$ ;
29    $t' \leftarrow$  the element at position  $j$  in  $\Phi_{i,e}(t)$ ;
30   return  $\text{RETRIEVEWITHGROUPING}(\mathcal{T}, e, t', \ell)$ ;
```

---

$R_a$	$R_b$	$R_{\tilde{b}}$	feq	$\tilde{\text{feq}}$
(1, 1)	(1, 1, 2)			
(1, 2)	(1, 2, 2)	(1, 2)	3	4
(2, 1)	(1, 3, 2)			
	(2, 1, 2)	(2, 2)	2	2
	(2, 2, 2)			
	(2, 1, 3)	(2, 3)	1	1

Fig. 3. An illustration of grouping optimization

$t \in R_{\tilde{p}_e} \times t_e$  传播 update, 而不是为每个元组  $t' \in R_{p_e} \times t_e$  传播 update, 其中  $R_{\tilde{p}_e}$  是关系  $R_{p_e}$  在  $p_e$  中连接属性的投影。Hence, we can see a significant reduction in the number of propagated updates.

*Example 4.5.* Consider the query  $Q = R_a(X, Y) \bowtie R_b(Y, Z, W) \bowtie R_c(W, U)$ . Let  $\mathcal{T}$  be the join tree rooted at  $R_c$ . We group tuples in  $R_b$  by attributes  $\{Y, W\}$ , creating  $R_{\tilde{b}}(Y, W)$  as in Figure ?? . The columns feq and  $\tilde{\text{feq}}$  represent the values of  $\text{feq}[\mathcal{T}, \tilde{b}, t]$  and  $\tilde{\text{feq}}[\mathcal{T}, \tilde{b}, t]$  respectively. By definition,  $\text{cnt}[\mathcal{T}, \tilde{b}, (W : 2)]$  equals to 10 . Suppose tuple (3, 1) is inserted into  $R_a$ . Then  $\text{cnt}[\mathcal{T}, a, (Y : 1)]$  increases from 2 to 4 . Next,  $\text{cnt}[\mathcal{T}, \tilde{b}, (W : 2)]$  increases to 18 , and  $\text{cnt}[\mathcal{T}, \tilde{b}, (W : 2)]$  increases to 32 . Note that with grouping, the change propagates through only one group (1, 2) instead of 3 tuples(i.e., (1, 1, 2), (1, 2, 2), and (1, 3, 2)).

**外键.** 当存在外键连接时, 类似于 [?], 我们只需将相应的子连接组合为一个整体关系。更具体地说, 对于  $R_i \bowtie_X R_j$ , 其中  $X$  是  $R_j$  的主键, 我们将  $R_i, R_j$  组合在一起作为新的关系  $R_{ij} = R_i \bowtie R_j$ 。这种组合可以递归地完成, 直到不再存在外键连接。当元组  $t_i$  插入到  $R_i$  中时, 我们检查是否存在值为  $\pi_X t_i$  的匹配元组  $t_j \in R_j$ 。如果存在  $t_j$ , 我们将  $t_{ij} = t_i \bowtie t_j$  插入到  $R_{ij}$  中。但是, 当一个元组  $t_j$  入到  $R_j$  中时, 我们需要识别  $R_i$  中所有可以与  $t_j$  连接的元组, 并将  $t_{ij} = t_i \bowtie t_j$  插入到  $R_{ij}$  中。

*Example 4.6.* Considering an example of foreign-key joins, where attributes with underscores are the primary keys of relations):

$$Q := R_1(\underline{X}, Y) \bowtie R_2(Y, \underline{Z}) \bowtie R_3(Z, \underline{W}, U) \bowtie R_4(\underline{U}, A) \bowtie R_5(A, \underline{C}) \bowtie R_6(C, \underline{E})$$

After applying the combination technique, we can rewrite  $Q$  as  $R_1(\underline{X}, Y) \bowtie S(Y, Z, \underline{W}, U, A) \bowtie T(A, C, \underline{E})$ , where  $S = R_2(Y, \underline{Z}) \bowtie R_3(Z, \underline{W}, U) \bowtie R_4(\underline{U}, A)$  and  $T = R_5(A, \underline{C}) \bowtie R_6(C, \underline{E})$ .

## 5 循环连接的扩展

接下来, 我们将通过采用经典的 GHD 分解框架 [?], 在 Section ?? 中展示如何使用我们的算法处理循环连接。已经 [?] 表明, 对于连接查询  $Q = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  和任何输入大小为  $N$  的实例, 最大连接大小为  $\Theta(N^{\rho^*(Q)})$ , 其中  $\rho^*(Q)$  是覆盖  $Q$  的小数边数。Please see an example in Figure ??.

*Definition 5.1 (Fractional Edge Covering Number).* Given a join query  $Q = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , a fractional edge covering is a function  $W : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$  such that  $\sum_{e \in \mathcal{E}: x \in e} W(e) \geq 1$  for every attribute  $x \in \mathcal{V}$ . The fractional edge covering number  $\rho(Q)$  is defined as minimum value of  $\sum_{e \in \mathcal{E}} W(e)$  over all possible fractional edge coverings  $W$ .

*Definition 5.2 (Generalized Hypertree Decomposition).* Given a join query  $Q = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , a GHD of  $Q$  is a pair  $(\mathcal{T}, \lambda)$ , where  $\mathcal{T}$  is a tree as an ordered set of nodes and  $\lambda : \mathcal{T} \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$  is a labeling function, which associates to each vertex  $u \in \mathcal{T}$  a subset of attributes in  $\mathcal{V}$ , such that the following conditions are satisfied:

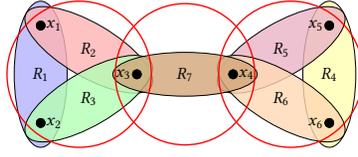


Fig. 4. 哑铃与 GHD  $Q = R_1(x_1, x_2) \bowtie R_2(x_1, x_3) \bowtie R_3(x_2, x_3) \bowtie R_4(x_5, x_6) \bowtie R_5(x_4, x_5) \bowtie R_6(x_4, x_6) \bowtie R_7(x_3, x_4)$  连接, 如红色圆圈所示。它具有分数超树宽度  $w(Q) = 1.5$ , 因为三角形连接  $R_1(x_1, x_2) \bowtie R_2(x_1, x_3) \bowtie R_3(x_2, x_3)$  并且  $R_5(x_4, x_5) \bowtie R_6(x_4, x_6) \bowtie R_7(x_3, x_4)$  具有分数边覆盖数  $\rho^* = 1.5$ 。

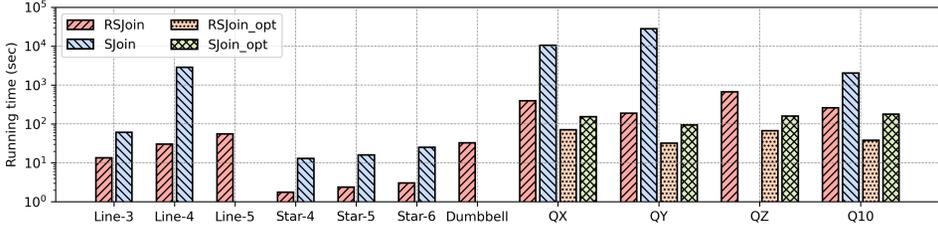


Fig. 5. 不同联接查询的运行时间

- 对于每个  $e \in \mathcal{E}$ , 都有一个节点  $u \in \mathcal{T}$  使得  $e \subseteq \lambda(u)$ ;
- 对于每个  $x \in \mathcal{V}$ , 节点集  $\{u \in \mathcal{T} : x \in \lambda(u)\}$  形成一个连接的子树  $\mathcal{T}$ 。

给定一个连接查询  $Q = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 、一个 GHD  $(\mathcal{T}, \lambda)$  和一个节点  $u \in \mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}$  的宽度被定义为其派生子查询  $Q_u = (\lambda_u, \mathcal{E}_u)$  的最优分数边覆盖数, 其中  $\mathcal{E}_u = \{e \cap \lambda_u : e \in \mathcal{E}\}$ 。给定一个联接查询和一个 GHD  $(\mathcal{T}, \lambda)$ ,  $(\mathcal{T}, \lambda)$  的宽度被定义为  $\mathcal{T}$  中所有节点的最大宽度。然后, 联接查询的小数超树宽度如下:

*Definition 5.3 (Fractional Hypertree Width [? ])*. The fractional hypertree width of a join query  $Q$ , denoted as  $w(Q)$ , is  $w(Q) = \min_{(\mathcal{T}, \lambda)} \max_{u \in \mathcal{T}} \rho^*(Q_u)$ , i.e., the minimum width over all GHDs.

我们的算法建立在输入连接查询  $Q$  的 GHD  $(\mathcal{T}, \lambda)$  之上, 并通过将  $\mathcal{T}$  根扎到一个不同的节点来考虑每个版本的  $\mathcal{T}$ 。给定一个实例  $\mathcal{R}$ , 我们将每个节点  $u \in \mathcal{T}$  的子实例定义为  $\mathcal{R}_u = \{\pi_{e \cap \lambda_u} R_e : e \in \mathcal{E}, e \cap \lambda_u \neq \emptyset\}$ 。假设将元组  $t$  插入到关系  $R_e$  中。对于每个  $u \in \mathcal{T}$   $e \cap \lambda_u \neq \emptyset$  的节点, 我们在实例  $\mathcal{R}_u$  中将元组  $\pi_{e \cap \lambda_u} t$  添加到关系  $\pi_{e \cap \lambda_u} R_e$ , 并更新  $Q_u$  的结果。我们选择一个任意节点  $u \in \mathcal{T}$ ,  $e \subseteq \lambda_u$ 。设  $\Delta_u = Q_u(\mathcal{R}_u) \bowtie t$  是  $t$  的 delta 连接结果。For every tuple  $t' \in \Delta_u$ , we just execute line 5-7 in Algorithm ??.

正确性遵循以下事实:  $Q(\mathcal{R}) \bowtie t = \biguplus_{t' \in \Delta_u} Q(\mathcal{R}) \bowtie t'$ , 其中  $\biguplus$  是不相交的并集运算符。

**时间复杂度.** 接下来, 我们分析时间复杂度。对于插入到  $R_e$  中的每个元组  $t$ , 每个节点  $u$  的  $Q_u$  连接结果可以及时更新  $AGM(Q_u, \mathcal{R}_u \bowtie t)$ 。将  $\mathcal{T}$  中所有插入的元组和节点相加, 时间复杂度为

$$\sum_{u \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{t \in R_e} AGM(Q_u, \mathcal{R}_u \bowtie t) \leq AGM(Q_u, \mathcal{R}_u) = O(N^{w(Q)}).$$

此外, 我们还可以通过  $AGM(Q_u, \mathcal{R}_u \bowtie t)$  来约束  $\Delta_u(t)$  的大小。因此, GHD  $(\mathcal{T}, \lambda)$  上模拟输入流的大小受  $\sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{t \in R_e} AGM(Q_u, \mathcal{R}_u \bowtie t) = O(N^{w(Q)})$  的限制。

**空间使用情况.** Our index for cyclic joins builds upon a GHD  $(\mathcal{T}, \lambda)$  for  $Q$ . Note that the total number of input tuples inserted into each node of  $\mathcal{T}$  is  $O(N^w)$ , where  $w$  is the fractional hypertree

width of  $Q$ . Following the same analysis of acyclic joins in Section ??, the space used by our index is proportional to the total number of tuples in each node of  $\mathcal{T}$ , i.e.,  $O(N^w)$  for cyclic joins.

把所有东西放在一起，我们得到：

**THEOREM 5.4.** *Given any join  $Q$ , an initially empty database  $\mathcal{R}$ , a sample size  $k$ , and a stream of  $N$  tuples, Algorithm ?? maintains  $k$  uniform samples without replacement for each  $Q(\mathcal{R}^i)$ , uses  $O(N^w)$  space and runs in  $O(N^w \cdot \log N + k \cdot \log N \cdot \log \frac{N}{k})$  expected time, where  $w$  is the fractional hypertree width of  $Q$ .*

## 6 实验

### 6.1 设置

**Implementation.** 我们将我们的算法（表示为 RSJoin）以及存在外键连接时的优化版本（表示为 RSJoin\_opt）与算法 in [?]（表示为 SJoin）及其存在外键连接时的优化版本（表示为 SJoin\_opt）进行了比较，这也是支持在更新下对连接进行随机采样的最新方法。We mentioned that the symmetric hash join algorithm [?] was proposed for computing the (delta) join results for the basic two-table join over data streams. In [?], symmetric join was combined with reservoir sampling for supporting maintaining uniform samples over joins and also tested as a baseline solution, but its performance is overall dominated by [?], hence we do not include it in our experiments. 我们在 C++ 中实现我们的算法，并在一台配备两个 Intel Xeon 2.1GHz 处理器、24 个内核和 251 GB 内存、运行 CentOS 7 的机器上进行实验。我们重复每个实验 10 次（超时为 12 小时）并报告平均运行时间。所有代码均可在 [?] 获得。

**数据集和查询.** 我们评估图形和关系数据集/查询的算法。SQL 中的所有查询都可以在附录 ?? 中找到。我们使用包含来自 SNAP (斯坦福网络分析项目) [?] 的 508,837 条边的 Epinions 数据集作为图形数据集。每个关系都包含所有边。我们随机洗牌每个关系的所有边，以模拟输入流。在 Epinions 上，我们评估线  $k$  连接（在长度  $k$  图中找到路径）、星形  $k$  连接（查找共享公共顶点的  $k$  边的所有组合）和哑铃连接（查找由边连接的所有三角形对）。图形查询中没有外键连接。

我们使用两个关系数据集。一个是 TPC-DS 数据集 [?]，它对决策支持系统的几个普遍适用的方面进行了建模。我们在 TPC-DS 上评估与 [?] 相同的 QX、QY 和 QZ 查询，其中包括外键连接，并遵循与 [?] 相同的设置，以便预加载小维度表（例如 date\_dim 和 household\_demographics，而其余表以流方式加载。另一个是 LDBC Social Network Benchmark (LDBC-SNB) [?]，它专注于带有更新的连接繁重的复杂查询。我们测试了来自商业智能 (BI) 工作负载 10 Q10 查询。与以前类似，静态表（如 tag 和 city）是预加载的，动态表是以流式处理方式加载的。

### 6.2 实验结果

**Running time.** 图 ?? 显示了所有算法在测试查询上的运行时间。对于图查询（即线  $k$ 、星形  $k$  和哑铃），样本量为 100,000。对于关系查询（即 QX、QY、QZ 和 Q10），样本大小为 1,000,000。对于 TPC-DS 数据集，我们使用比例因子 10，而对于 LDBC-SNB 数据集，我们使用比例因子 1。首先，RSJoin 和 RSJoin\_opt 可以在 12 小时的时间限制内完成所有查询 SJoin 而不能在第 5 行联接和 QZ 联接上完成。对于哑铃联接，SJoin 缺少结果，因为它不支持循环查询。其次，RSJoin 始终是所有联接查询中最快的。根据现有结果，RSJoin 在 SJoin 上实现了从 4.6 倍到 147.6 倍的加速，更不用说无法及时完成 SJoin 情况了。当存在外键连接（即 QX、QY、QZ 和 Q10）时，RSJoin\_opt 实现了比 SJoin\_opt 的 2.2 倍到 4.7 倍的改进。此外，对于 QX、QY、QZ 和 Q10，RSJoin 并不严重依赖外键优化作为 SJoin。只要数据满足外键约束，RSJoin 就会在合理的时间内完成执行，但 SJoin 并非如此。

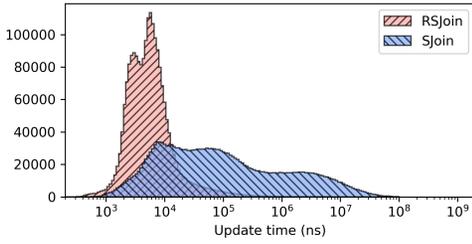


Fig. 6. 更新时间分布

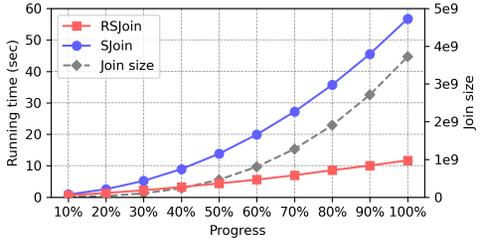


Fig. 7. 运行时间与输入大小和联接大小的关系

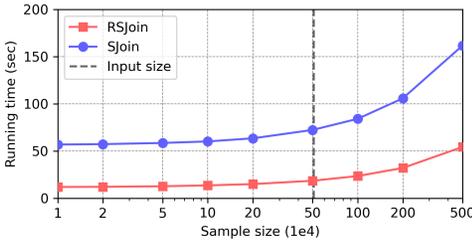


Fig. 8. 运行时间与样本量

Optimizations	# Execution	Run-time (sec)
N/A	172010370	678.864
Foreign-key	132175648	204.614
Foreign-key + Grouping	597557	68.047

Fig. 9. 基于 TPC-DS 数据集的 QZ 优化

**Update time.** 为了比较更新时间，我们禁用了两种算法的采样部分，并测量了每个输入元组所需的更新时间。图 ?? 显示了第 4 行连接的结果。所需的大部分更新时间约为  $10 \mu$ ，平均为  $13 \mu$  秒。某些元组可能会产生更大的更新时间（在本例中为 51 毫秒），但总体更新时间仍然很小，这与我们对摊销更新时间  $O(\log N)$  理论分析一致。相比之下，SJoin 的更新时间无法保证，其更新时间范围为  $0.5 \mu$  秒至 165 毫秒，平均为 1.4 毫秒。

**输入大小和联接大小.** 接下来，我们将研究输入大小  $N$  以及连接大小（即连接结果的数量）如何影响所有方法的总执行时间。我们固定了要 10,000 的样本量  $k$ ，并记录了每 10 个 % 输入数据处理第 3 行连接后的总执行量。图 ?? 显示了生成的加入结果总数和总执行时间的进度。我们可以看到，联接结果的总数随着输入大小的增加呈指数增长，而 RSJoin 的总执行时间几乎与输入大小成正比，而不是与联接大小成正比。这是意料之中的，因为 RSJoin 的时间复杂度是  $O(N \cdot \log N + k \cdot \log N \cdot \log \frac{N}{k})$ ，在这种情况下，术语  $N \log N$  几乎占据了总执行时间的主导地位。相比之下，SJoin 的总执行时间呈现明显的增加趋势，同时连接大小的增加也远大于输入大小。

**样本量.** 接下来，我们将研究样本量  $k$  如何影响两种算法的总执行时间。图 ?? 显示了第 3 行连接的运行时间，当  $k$  从 10,000 到 5,000,000 不等时。虚线表示输入大小  $N = 508,837$ ，联接结果数为 3,721,042,797。当样本大小小于输入大小（即  $k \leq N$ ）时，RSJoin 的总执行时间增长非常慢。更具体地说，当  $k$  从 1 增加到 50 时，RSJoin 的总执行时间仅增加 2 倍。但是，当采样时间覆盖输入大小（即  $k > N$ ）时，RSJoin 的总执行时间开始迅速增加。这也再次被预料到，因为 RSJoin 的理论复杂性  $O(N \cdot \log N + k \cdot \log N \cdot \log \frac{N}{k})$ 。当  $k \leq N$  时，术语  $O(N \cdot \log N)$  在总执行时间中占主导地位，因此在此制度中增加样本量不会显著改变总执行时间。当  $k > N$  时，术语  $O(k \cdot \log N \cdot \log \frac{N}{k})$  反而主导了总执行时间，因此增加样本量会导致总执行时间的快速增加。SJoin 也遵循类似的趋势。此外，当样本量达到  $k = 10,000$  时，SJoin 所需的运行时间甚至比 RSJoin 在样本量大于  $k = 5,000,000$  的情况下所需的运行时间还要长。

**可扩展性.** 为了检查这两种方法的可伸缩性，我们在比例因子为 1、3、10 和 30 的 TPC-DS 数据集上评估了 QZ 查询。结果如图 ?? 所示。当比例因子为 1 时，QZ 的输入大小约为 226MB，而当比例因子达到 30 时，输入大小约为 6.6GB。我们在此处不包括 SJoin 的结果，因为即使

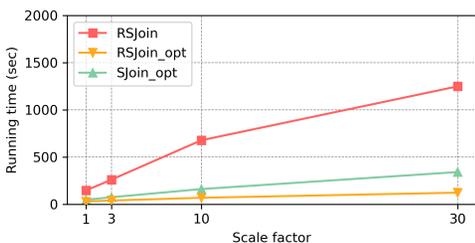


Fig. 10. 运行时间与比例因子的关系

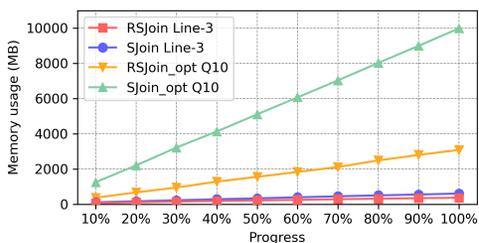


Fig. 11. 内存使用量与输入大小

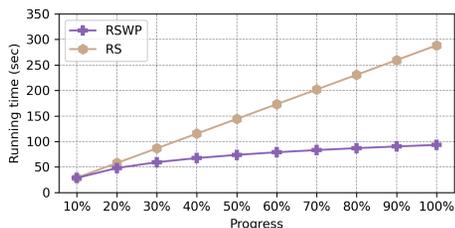


Fig. 12. Running time v.s. input size

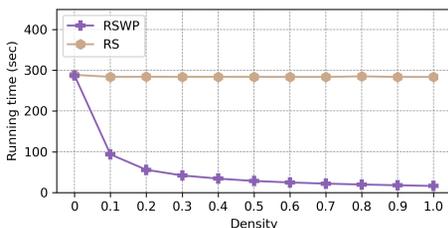


Fig. 13. Running time v.s. density

比例因子为 1，完成执行也需要 4 个多小时。我们观察到，即使不应用外键优化，RSJoin 随着比例因子的增加，运行时间也实现了线性增长，这表明即使在处理非常巨大的输入大小时，RSJoin 也是可扩展和实用的。

**内存使用情况.** 此外，我们还探讨了所有方法的内存使用情况。图 ?? 显示了第 3 行连接上 RSJoin 和 SJoin 的内存使用情况，并在 Q10 查询上 RSJoin\_opt 和 SJoin\_opt。第 3 行连接的输入大小约为 21MB，查询的输入大小约为 505MB Q10。每处理 10 个% 输入数据后，我们记录内存使用情况，如图 ?? 所示。Q10 的内存使用量增长速度比第 3 行联接快得多，因为它更复杂，并且构建了更多的专用索引。所有算法所需的内存使用量与输入大小成线性关系。在第 3 行连接时，RSJoin 只需要 60 个% 的内存到 SJoin，而在 Q10 上，RSJoin\_opt 只需要 31 个% 的内存到 SJoin\_opt。这演示了我们算法的一个很好的属性：RSJoin 和 RSJoin\_opt 在执行期间使用的内存量与输入大小呈线性关系，即使联接大小呈指数增长，这也使我们的算法能够在内存资源有限的情况下处理大型输入数据集上更复杂的查询。

**优化.** 我们通过 Table counting the number of loop execution lines 9-11 in Algorithm ?? 来评估优化的有效性 ?? 记录了我们的方法在 TPC-DS 数据集上 QZ 查询的计数和总运行时间（比例因子 10，样本数量 1,000,000）。可以清楚地看到，当应用外键优化时，传播次数和总执行时间都会减少。如果应用分组优化，我们可以进一步减少总执行时间，在不进行优化的情况下，RSJoin 实现大约 10 倍的加速。

### 6.3 Reservoir Sampling with Predicate

At last, we compare our new reservoir sampling algorithm with predicate (denoted as RSWP) with the classic reservoir sampling algorithm (denoted as RS) on data streams. We generate a data stream as follows. We fix a random string of 1024 characters, referred as the query string. Each item in the input stream is a random string, within edit distance ranging from 0 to 64 from the base string. The predicate selects all strings in the data stream whose edit distance from the query string is less than or equal to 16.

In Figure ??, we take a  $\frac{1}{10}$ -dense stream of 100,000 strings with sample size  $k = 1,000$ . We record the execution time after processing every 10% of the input stream. As RS needs to process every item (i.e., compute the edit distance from the query string), the running time of RS is linear

to the number of items in the stream processed so far. The time required by RSWP for processing the first 10% of the input stream is the same as RS, since both of them need to process every one in the first 10,000 items (approximately) until it fills the reservoir. After that, the running time of RSWP grows slower and slower, which is consistent with our theoretical result that it takes  $O(\frac{k}{r_i+1})$  expected time to process the  $i$ -th item.

In figure ??, we measure the running time of both RSWP and RS over 11 streams of same input size but different densities. As RS needs to process every item in the stream, its running time only depends on the input size, instead of the density of input stream. In contrast, the running time of RSWP depends on the density of stream. In an extreme case, when no item passes the predicate (i.e., the density is 0), RSWP cannot skip any item and hence requires the same time as RS. However, as density increases, the running time of RSWP decreases significantly. In another extreme case, when every item passes the predicate (i.e., the density is 1.0), RSWP exhibits a speed advantage of 17.7x over RS.

## 7 相关工作

除了第 ?? 节中提到的直接相关的工作外，以下工作也与我们的工作有关：

**流子图采样.** 还考虑了从边缘作为输入流的图中采样子图模式的问题（其中空间使用很重要）。例如，Paven 等。Al [?] 设计了一种使用  $O(\frac{N^{3/2}}{OUT})$  空间的算法，其中 OUT 是图中三角形的数量。在属性测试领域（对图的次线性查询访问次数很重要），Eden 等人 [?] 研究了边缘几乎均匀采样的问题，Biswas 等人.al [?] 研究了抽样子图的问题。

**在“更新”下维护连接查询.** [??] 已经表明，一类非常严格的查询（称为 q-hierarchical 查询）可以允许具有  $O(1)$  更新时间的索引。但是，对于任何小的常量  $\epsilon > 0$ ，任何非 q 分层查询， $\Omega(N^{\frac{1}{2}-\epsilon})$  的下限也在更新时间得到证明。这个结果是相当负面的，因为 q-hierarchical 查询是一个非常受限制的类；例如，第 3 行连接。同时，[?] 显示了一个可以  $O(N)$  时间更新的非循环连接指数。后来，Kara 等人 [?] 设计了最优的数据结构，可以在  $O(\sqrt{N})$  时间内更新，同时支持  $O(1)$ -3 行连接、三角形连接、长度 4 周期连接等的延迟枚举。此外，Kara et al. [?] 还研究了分层查询的更新时间和延迟之间的权衡。Wang et al. [??] 通过将更新时间与更新序列的封闭性联系起来来研究与实例相关的复杂性。

## 8 结论

在本文中，我们提出了一种支持谓词的通用储层采样算法。我们设计了一个动态的数据结构，支持高效更新和直接访问连接结果。通过结合这两种关键技术，我们提出了在近线性时间内运行的储层采样连接算法。有几个有趣的问题悬而未决，例如对数据流的联接项目查询进行统一采样。

### A 查询

#### 3 号线加入.

```
SELECT G1.src AS A, G2.src AS B, G3.src AS C, G3.dst AS D
FROM G AS G1, G AS G2, G AS G3
WHERE G1.dst = G2.src AND G2.dst = G3.src
```

#### 4 号线加入.

```
SELECT G1.src AS A, G2.src AS B, G3.src AS C, G4.src AS D, G4.dst AS E
FROM G AS G1, G AS G2, G AS G3, G AS G4
WHERE G1.dst = G2.src AND G2.dst = G3.src AND G3.dst = G4.src
```

#### 5 号线加入.

```

SELECT G1.src AS A, G2.src AS B, G3.src AS C, G4.src AS D, G5.src AS E, G5.dst AS F
FROM G AS G1, G AS G2, G AS G3, G AS G4, G AS G5
WHERE G1.dst = G2.src AND G2.dst = G3.src AND G3.dst = G4.src AND G4.dst = G5.src

```

#### Star-4 加入.

```

SELECT *
FROM G AS G1, G AS G2, G AS G3, G AS G4
WHERE G1.src = G2.src AND G1.src = G3.src AND G1.src = G4.src

```

#### Star-5 加入.

```

SELECT *
FROM G AS G1, G AS G2, G AS G3, G AS G4, G AS G5
WHERE G1.src = G2.src AND G1.src = G3.src AND G1.src = G4.src AND G1.src = G5.src

```

#### Star-6 加入.

```

SELECT *
FROM G AS G1, G AS G2, G AS G3, G AS G4, G AS G5, G AS G6
WHERE G1.src = G2.src AND G1.src = G3.src AND G1.src = G4.src AND G1.src = G5.src AND G1
    .src = G6.src

```

#### 哑铃加入.

```

SELECT *
FROM G AS G1, G AS G2, G AS G3, G AS G4, G AS G5, G AS G6, G AS G7
WHERE G1.dst = G2.src AND G2.dst = G3.src AND G3.dst = G1.src
AND G4.dst = G5.src AND G5.dst = G6.src AND G6.dst = G4.src
AND G1.src = G7.src AND G4.src = G7.dst

```

#### QX 联接.

```

SELECT *
FROM store_sales, store_returns, catalog_sales,
date_dim d1, date_dim d2 WHERE ss_item_sk = sr_item_sk
AND ss_ticket_number = sr_ticket_number AND sr_customer_sk = cs_bill_customer_sk AND d1.
    d_date_sk = ss_sold_date_sk
AND d2.d_date_sk = cs_sold_date_sk;

```

#### QY 联接.

```

SELECT *
FROM store_sales, customer c1, household_demographics d1,
customer c2, household_demographics d2 WHERE ss_customer_sk = c1.c_customer_sk
AND c1.c_current_hdemo_sk = d1.hd_demo_sk
AND d1.hd_income_band_sk = d2.hd_income_band_sk AND d2.hd_demo_sk = c2.
    c_current_hdemo_sk;

```

#### QZ 联接.

```

SELECT *
FROM store_sales, customer c1, household_demographics d1,
item i1, customer c2, household_demographics d2, item i2 WHERE ss_customer_sk = c1.
    c_customer_sk

```

```
AND c1.c_current_hdemo_sk = d1.hd_demo_sk
AND d1.hd_income_band_sk = d2.hd_income_band_sk AND d2.hd_demo_sk = c2.
  c_current_hdemo_sk
AND ss_item_sk = i1.i_item_sk
AND i1.i_category_id = i2.i_category_id;
```

### Q10 加入.

```
SELECT *
FROM Message, Tag AS Tag1, Tag AS Tag2, City, Country,
HasTag AS HasTag1, HasTag AS HasTag2,
TagClass, Person AS Person1, Person AS Person2, Knows
WHERE Message.id = HasTag1.message_id
AND HasTag1.tag_id = Tag1.id
AND Message.id = HasTag2.message_id
AND HasTag2.tag_id = Tag2.id
AND Tag2.type_tag_class_id = TagClass.id
AND Message.creator_person_id = Person1.id
AND Person1.location_city_id = City.id
AND City.part_of_place_id = Country.id
AND Person1.id = Knows.person1_id
AND Knows.person2_id = Person2.id
```