

更快的算法，实现公平的最大-最小化 \mathbb{R}^d *

YASH KURKURE[†], Department of Computer Science, University of Illinois at Chicago, USA

MILES SHAMO[†], Department of Computer Science, University of Illinois at Chicago, USA

JOSEPH WISEMAN[†], Department of Computer Science, University of Illinois at Chicago, USA

SAINYAM GALHOTRA, Department of Computer Science, Cornell University, USA

STAVROS SINTOS, Department of Computer Science, University of Illinois at Chicago, USA

The task of extracting a diverse subset from a dataset, often referred to as maximum diversification, plays a pivotal role in various real-world applications that have far-reaching consequences. In this work, we delve into the realm of fairness-aware data subset selection, specifically focusing on the problem of selecting a diverse set of size k from a large collection of n data points (FairDiv). The FairDiv problem is well-studied in the data management and theory community. In this work, we develop the first constant approximation algorithm for FairDiv that runs in near-linear time using only linear space. In contrast, all previously known constant approximation algorithms run in super-linear time (with respect to n or k) and use super-linear space. Our approach achieves this efficiency by employing a novel combination of the Multiplicative Weight Update method and advanced geometric data structures to implicitly and approximately solve a linear program. Furthermore, we improve the efficiency of our techniques by constructing a coresets. Using our coresets, we also propose the first efficient streaming algorithm for the FairDiv problem whose efficiency does not depend on the distribution of data points. Empirical evaluation on million-sized datasets demonstrates that our algorithm achieves the best diversity within a minute. All prior techniques are either highly inefficient or do not generate a good solution.

CCS Concepts: • **Theory of computation** → **Data structures and algorithms for data management**.

Additional Key Words and Phrases: fairness, diversity, max-min diversification, Multiplicative Weight Method, geometric data structures, BBD tree

ACM Reference Format:

Yash Kurkure, Miles Shamo, Joseph Wiseman, Sainyam Galhotra, and Stavros Sintos. 2024. 更快的算法，实现公平的最大-最小化 \mathbb{R}^d . *Proc. ACM Manag. Data* 2, 3 (SIGMOD), Article 137 (June 2024), ?? pages. <https://doi.org/10.1145/3654940>

*This work was partially supported by CAHSI-Google IRP.

†The first three authors contributed equally to this research.

Authors' addresses: Yash Kurkure, Department of Computer Science, University of Illinois at Chicago, Chicago, USA, ykurku2@uic.edu; Miles Shamo, Department of Computer Science, University of Illinois at Chicago, Chicago, USA, milesshamo@gmail.com; Joseph Wiseman, Department of Computer Science, University of Illinois at Chicago, Chicago, USA, jwisem6@uic.edu; Sainyam Galhotra, Department of Computer Science, Cornell University, Ithaca, USA, sg@cs.cornell.edu; Stavros Sintos, Department of Computer Science, University of Illinois at Chicago, Chicago, USA, stavros@uic.edu.

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. Copyrights for components of this work owned by others than the author(s) must be honored. Abstracting with credit is permitted. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee. Request permissions from permissions@acm.org.

© 2024 Copyright held by the owner/author(s). Publication rights licensed to ACM.

ACM 2836-6573/2024/6-ART137

<https://doi.org/10.1145/3654940>

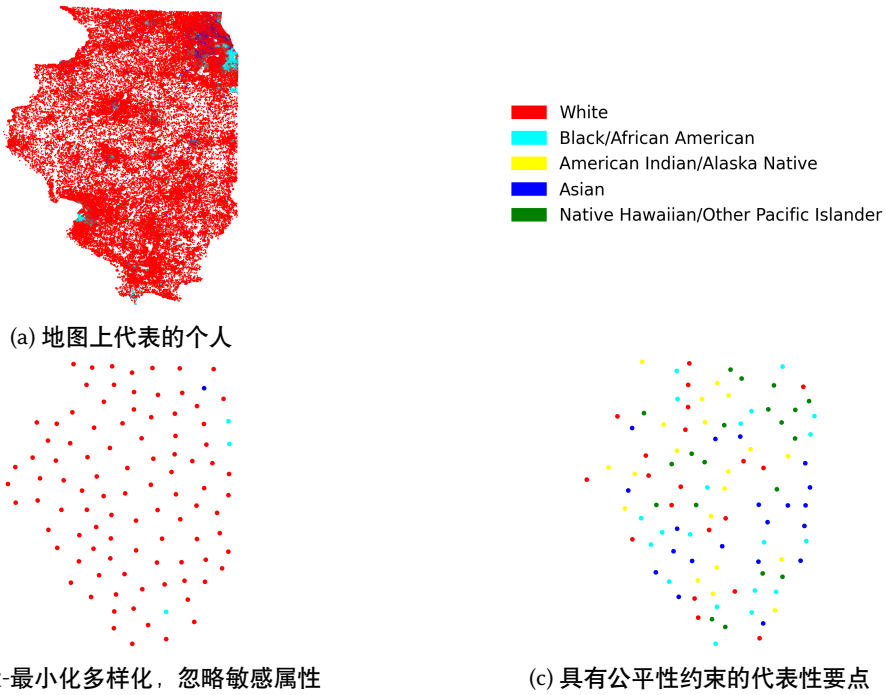


Fig. 1. 示例方案, 其中每个点表示伊利诺伊州的个人。(b) 显示了该数据集上最大-最小分化技术的偏差输出。(c) 表示我们算法的公平输出。

1 介绍

在许多真实场景中, 包括数据汇总、Web 搜索、推荐系统和特征选择, 必须从数据集中提取多样化的子集 (通常称为最大多样化)。在这些领域做出的决定会产生重大影响。因此, 至关重要的是要保证结果不仅多样化, 而且公正。例如, 虽然数据汇总的主要目标是选择一个包含类似数据点的代表性样本, 但传统的汇总技术已被确定为对少数群体的偏见, 导致有害影响。在这项工作中, 我们研究了公平意识最大多样化的问题, 其目标是选择一组满足群体公平约束的多样化代表性数据点。

我们考虑了在最大-最小多样化中确保群体公平性的问题。我们得到一组项目¹, 其中每个项目都属于一个由敏感属性确定的组 (我们将其称为颜色)。给定每个颜色 i 的参数 k_i , 目标是返回 S 项的子集, 以便 S 包含来自每个组 j 的至少 k_j 个点, 并且 S 中的最小成对距离最大化。我们研究了几何设置中输入项是 \mathbb{R}^d 中的点的问题, 对于常数维数 d 。此设置包含大多数实际场景, 因为许多数据集都表示为欧几里得空间中的点。即使输入项不是 \mathbb{R}^d 中的点, 通常也会出现这样的情况: 这些项可以嵌入到一个内在维数低的几何空间中 (误差低 [??])。虽然我们关注的是欧几里得空间, 但我们的一些算法可以扩展到有限维 [??] 度量空间。

我们用下面的例子来激励这个问题。

Example 1.1. Consider a state-court of Illinois, which wants to form a jury consisting of individuals from the state. One of the primary goals of this jury selection task is to identify individuals from neighborhoods that are far apart, i.e. maximize the minimum distance between selected individuals and have representation of people from diverse backgrounds and cultures. This problem has often been studied as a max-min diversification problem [?]. Figure ?? (a) shows the different

¹术语“项目”和“点”可以互换使用。

individuals on the map, where each point is colored based on their sensitive attribute. Running a traditional Max-min diversification algorithm on this dataset returned highly biased results (most of the returned points belong to white, as shown in Figure ?? (b)). Using the fairness constraint, the output contains points from different sensitive groups. The issue of fair jury selection has been a key focus of courts across the world [??], where many studies have recorded biases in jury and its consequences in their decisions [?].

这个例子激发了研究最大-最小多样化的公平意识变体的重要性。现在，我们正式定义了这个问题，然后讨论了关键的贡献。

Problem Definition. 我们得到一组 n 个点的 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 和一组 m 颜色 $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ 。每个点 $p \in P$ 都与一个颜色 $c(p) \in C$ 相关联。对于任何子集 $S \subseteq P$ ，设 $S(c_j) = \{p \in S \mid c(p) = c_j\}$ 是集合 S 中的点集，颜色为 c_j 。我们为每对 $i < j$ 和 $\bigcup_j S(c_j) = S$ 都有 $S(c_i) \cap S(c_j) = \emptyset$ 。设 $\text{div}(S) = \min_{p, q \in S} \|p - q\|_2$ 分集函数，表示 S 中点之间的最小成对欧几里得距离。为简单起见，在整篇论文中，我们写 $\|p - q\|$ 来表示 $p, q \in \mathbb{R}^d$ 点的欧几里得距离。

DEFINITION 1 (FAIRDIV). 给定 \mathbb{R}^d 中 n 颜色的集合 P ，其中 d 是一个常数，一组颜色 C ，整数 k_1, k_2, \dots, k_m 使得 $\sum_{j \in [1, m]} k_j = k$ ，目标是找到一个集合 $S^* \subseteq P$ ，使得 $\text{div}(S^*)$ 最大化，并且对于每个 $c_j \in C$ ，它都保持 $|S^*(c_j)| \geq k_j$ 。

让 $\gamma^* = \text{div}(S^*)$ 成为 FairDiv 问题的最佳多样性。对于参数 $\beta > 1$ ，我们说一个算法是 FairDiv 的 $\frac{1}{\beta}$ 近似值，如果它为每个 $c_j \in C$ 返回一个具有 $\text{div}(S) \geq \frac{1}{\beta} \gamma^*$ 和 $|S(c_j)| \geq k_j$ 的集合 S 。近似比值为 $\frac{1}{\beta}$ 。最后，我们说一个算法是具有 $(1 - \epsilon)$ 公平性的 $\frac{1}{\beta}$ 近似，如果它为每个 $c_j \in C$ 返回一个具有 $\text{div}(S) \geq \frac{1}{\beta} \gamma^*$ 和 $|S(c_j)| \geq \frac{k_j}{1 - \epsilon}$ 的集合 S 。

Furthermore, we define the notion of coreset, which is useful in the next sections. A set $G \subseteq P$ is a $(1 + \epsilon)$ -coreset for the FairDiv problem if there exists a subset $\hat{S} \subseteq G$ such that \hat{S} satisfies the fairness constraints and $\text{div}(\hat{S}) \geq \gamma^*/(1 + \epsilon)$ 。

In many scenarios, the input consists of a stream of data which evolves over time, for example, tweets generated in real time or reviews of restaurants on Google or beer reviews on social media [?]. In the context of Twitter, the goal is to choose a representative subset of tweets in real time originating from various geographic locations (diversity). This selection should ensure that every topic (politics, sports, etc.) is sufficiently represented by related tweets (fairness). In this setting, the above discussed methods would need to be run from scratch for each new tweet. Instead, we study the extension of FairDiv problem when we receive the data in a streaming setting. This problem has been studied in [?] with various applications in modern database systems. In another example, an application might handle massive amounts of data that cannot be stored in memory to run an offline algorithm for the FairDiv problem. Instead, a pass is made over the data storing and maintaining only a small subset of elements in memory (synopsis) that is used to get an approximate solution for the FairDiv problem in the full dataset. During this pass, we maintain the synopsis efficiently under new insertions and, when needed, we should return a fair and diverse set representing all the items we have encountered in the stream. We have considered the beer reviews dataset to evaluate our techniques in a streaming setting (Section ??).

DEFINITION 2 (SFAIRDIV). 我们得到了一组颜色 C 和整数 k_1, k_2, \dots, k_m ，使得 $\sum_{j \in [1, m]} k_j = k$ 。在 $time$ 实例 t 时，我们收到一个颜色为 $c(p_t) \in C$ 的新点 p_t 。让我们 P_t 成为我们收到的一组积分，直到时间 t 。在任何时间实例 t ，目标是保持点 $\hat{P}_t \subseteq P_t$ 的“小”子集，以便仅使用存储在 \hat{P}_t 中的点有效地构造 P_t 中 FairDiv 问题的解决方案。

数据分析师可能希望运行多个查询，以探索具有公平和多样化代表性集的数据区域。例如，有人可能想探索伊利诺伊州既公平又多样化的社区。我们研究了范围查询设置，其中

Notation	Meaning
P	Point set
n	$ P $
C	Set of colors
m	$ C $
$c(p)$	Color of point $p \in P$
$S(c_j)$	Set of points with color $c_j \in C$ in $S \subseteq P$
k	Total output size (lower bound)
k_j	Output size having color c_j (lower bound)
ε	approximation error
S^*	Optimum solution for the FairDiv problem
$\text{div}(S)$	Diversity of set S (minimum pairwise distance)
γ^*	$\text{div}(S^*)$
\mathcal{T}	BBD-tree
A	Matrix representation in MWU method
h	probability vector in MWU method

Table 1. 符号表

Problem	Method	Time	Space	Approximation	Fairness	
FairDiv/ No Coreset	[?]	$O(n^\lambda)$	$\Omega(n^2)$	$\frac{1}{2(1+\varepsilon)}$	Exact, Randomized	
	[?]	$O(nkm^3)$	$O(n + km^2)$	$\frac{1}{(m+1)(1+\varepsilon)}$	Exact, Deterministic	
	NEW	$O(nk)$	$O(n)$	$\frac{1}{2(1+\varepsilon)}$	$\frac{1}{1+\varepsilon}$ -approx., Randomized	
FairDiv/ Coreset	[?]	$O(nk + (mk)^\lambda)$	$\Omega(n + (km)^2)$	$\frac{1}{2(1+\varepsilon)}$	Exact, Randomized	
	[?]	$O(nk + k^2m^4)$	$O(n + km^2)$	$\frac{1}{(m+1)(1+\varepsilon)}$	Exact, Deterministic	
	NEW	$O(n + mk^2)$	$O(n)$	$\frac{1}{2(1+\varepsilon)}$	$\frac{1}{1+\varepsilon}$ -approx., Randomized	
SFairDiv		Update	Post-processing			
	[?]	$O(\log \Delta)$	$O((mk)^\lambda \log \Delta)$	$O(mk \log \Delta)$	$\frac{1-\varepsilon}{3m+2}$	Exact, Deterministic
	[?]	$O(\log \Delta)$	$O((mk)^\lambda \log \Delta)$	$O(mk \log \Delta)$	$\frac{1}{2(1+\varepsilon)}$	Exact, Randomized
	NEW	$O(k)$	$O(mk^2)$	$O(mk)$	$\frac{1}{2(1+\varepsilon)}$	$\frac{1}{1+\varepsilon}$ -approx., Randomized
QFairDiv	NEW	Construction	Query			
		$O(n)$	$O(mk^2)$	$O(n)$	$\frac{1}{2(1+\varepsilon)}$	$\frac{1}{1+\varepsilon}$ -approx., Randomized

Table 2. Comparison of our new algorithms with state-of-the-art. $\Delta = O(2^n)$ is the spread (max. over min. pairwise distance). $\lambda > 2$ is the exponent such that an LP with N constraints can be solved in $O(N^\lambda)$ time. For simplicity, we skip $\log^{O(1)} n$ factors.

的目标是构建一个数据结构，使得给定一个查询区域，目标是在亚线性时间内返回查询区域中公平且多样化的点。更正式地说，我们定义了 FairDiv 问题的下一个变体。

DEFINITION 3 (QFAIRDIV). 给定一组 \mathbb{R}^d 中 n 颜色的 P ，以及一组颜色 C ，目标是构造一个数据结构，使得给定一个查询矩形 R 和整数 k_1, k_2, \dots, k_m 使得 $\sum_{j \in [1, m]} k_j = k$ 返回一个集合 $S^* \subseteq P \cap R$ ，使得 $\text{div}(S^*)$ 最大化，并且对于每个 $c_j \in C(S^*)$ ，它认为 $|S^*(c_j)| \geq k_j$ 。

1.1 贡献

In Table ?? we show our main results and compare them with the state-of-the-art methods.

In Section ??, we present MFD, the first near-linear time algorithm for the FairDiv problem with constant approximation ratio. Our algorithm is also the first constant approximation algorithm that uses linear space. All previous constant approximation algorithms for FairDiv have super-linear running time and super-linear space with respect to either n or k . For a constant $\varepsilon \in (0, 1)$,

we get an $O(nk \log^3 n)$ time algorithm that returns a $\frac{1}{2(1+\epsilon)}$ -approximation for the FairDiv problem. The algorithm uses only $O(n)$ space. Each fairness constraint is satisfied approximately in expectation: If S is the returned set then $\mathbb{E}[S(c_j)] \geq \frac{k_j}{1-\epsilon}$, $\forall c_j \in C$. 如果每个 $k_j \geq 3(1+\epsilon)\epsilon^{-2} \log(2m)$ 都足够大，则在 Section ?? 中，我们满足公平性约束，在时间 $O(nk \log^3 n + n \log \frac{1}{\delta} \log n)$ 和空间 $O(n)$ 中，概率至少为 $1 - 1/\delta$ 。近似因子变为 $\frac{1}{6(1+\epsilon)}$ 。

In Section ?? we show that any algorithm for the k' -center clustering can be used to derive a $(1+\epsilon)$ -coreset of small size efficiently. By constructing a coreset and then running our MFD algorithm we get a $\frac{1}{2(1+\epsilon)}$ -approximation algorithm for the FairDiv problem that runs in $O(n \log k + mk^2 \log^3 k)$ time satisfying the fairness constraints approximately in expectation.

The generality of our coreset construction allows us to extend our algorithms in different settings. In Section ??, we design an efficient streaming algorithm for the SFairDiv problem, called StreamMFD, maintaining a coreset for the FairDiv problem. Our new streaming algorithm stores $O(mk)$ elements, takes $O(k \log k)$ update time per element for streaming processing, and $O(mk^2 \log^3 k)$ time for post-processing to return a constant approximation for the SFairDiv problem satisfying the fairness constraints approximately. In the range-query setting, we design a data structure of $O(n \log^{d-1} n)$ space in $O(n \log^{d-1} n)$ time, such that given a query rectangle R , a constant ϵ , and parameters k_1, \dots, k_m , it returns a set $S \subseteq P \cap R$ in $O(mk \log^{d-1} n + mk^2 \log^3 k)$ time, such that S is a $\frac{1}{2(1+\epsilon)}$ -approximation for the FairDiv problem in $P \cap R$, and $\mathbb{E}[S(c_j)] \geq \frac{k_j}{1+\epsilon}$, for every color $c_j \in C$. 在 Section ?? 中，我们在真实数据集上进行了实验，表明我们的新算法比其他基线更快地返回多样化和公平的结果。更具体地说，在返回具有相似多样性的公平结果的算法中，我们的算法始终是最快的算法。当另一个基线比我们的方法快时，它返回的集合的多样性总是比我们的算法返回的结果的多样性差得多。总体而言，MFD 在多样性和运行时间之间提供了最佳平衡。

2 预赛

Known techniques for FairDiv. 我们首先回顾了 [?] 中介绍的基于 LP 的算法，以找到 FairDiv 问题的解决方案。它们对所有可能的成对距离进行二进制搜索。对于距离 γ ，他们解决了以下可行性问题 (LP)。

$$(LP1) \quad \sum_{p_i \in P(c_j)} x_i \geq k_j \quad \forall c_j \in C \quad (1)$$

$$\sum_{p_i \in P \cap \mathcal{B}(p, \gamma/2)} x_i \leq 1 \quad \forall p \in P \quad (2)$$

$$1 \geq x_i \geq 0, \quad \forall p_i \in P \quad (3)$$

$\mathcal{B}(p, \gamma/2)$ 表示中心 p 和半径 $\gamma/2$ 的球。如果 (LP ??) 不可行，则尝试较小的 γ 值。否则，他们会尝试更大的 γ 值。然后，他们描述了一种舍入技术，用于构造 FairDiv 问题的有效解决方案。设 \hat{x} (LP ??) 的解 () 对应于 LP 可行的最大 $\hat{\gamma}$ 。它们生成 $[n]$ 的随机排序 σ 如下：从 $R_t = [n] \setminus \{\sigma(1), \dots, \sigma(t-1)\}$ 中随机选择 $\sigma(t)$ ，以便选择概率为 $\Pr[\sigma(t) = b] = \frac{\hat{x}_b}{\sum_{\ell \in R_t} \hat{x}_\ell}$ 的数字 $b \in R_t$ 。在生成排序 σ 后，他们构造输出集 $S \subseteq P$ 包括点 $p_j \in S$ 当且仅当 $\sigma(j) \leq \sigma(\ell)$ 所有 $p_\ell \in P \cap \mathcal{B}(p_j, \gamma/2)$ 。它们显示了以下定理。

THEOREM 2.1 ([?]). 上述算法返回一个具有 $\text{div}(S) \geq \gamma^*/2$ 的集合 S ，使得对于每个颜色 c_j ， $\mathbb{E}[|S(c_j)|] \geq k_j$ 。

请注意，算法的空间和运行时间都 $\Omega(n^2)$ 。具体来说，它只需要 $O(n^2)$ 空间来表示 (LP ??)，因为 $|P \cap \mathcal{B}(p, \gamma/2)| = O(n)$ 对于每个点 $p \in P$ 。求解 (LP ??) 的每个实例需要 $O(n^\lambda)$ 时

间, 其中 λ 是指数, 因此具有 N 变量和 N 约束的 LP 可以在 $O(N^\lambda)$ 时间内求解²。舍入算法在 $O(n^2)$ 时间内执行。总体而言, 运行时间 $O(n^\lambda \log n)$ 。

In the same paper they also propose the Fair-Greedy-Flow algorithm that returns a $\frac{1}{(m+1)(1+\epsilon)}$ -approximation in $O(nkm^3 \log n)$ time, for constant ϵ . The algorithm maps the FairDiv problem to a max-flow instance with $O(km)$ nodes and $O(mk^2)$ edges.

[?] 的作者还描述了一个用于 FairDiv 问题的 $(1 + \epsilon)$ -coreset。他们运行众所周知的 Gonzalez 算法 [?] 每个集合中的 k' -center 聚类问题, 独立地 $P(c_j)$, 对于 $k' = \epsilon^{-d}k$ 。让 G_j 成为 $P(c_j)$ 中冈萨雷斯算法的解决方案。然后, $G = \bigcup_{c_j \in C} G_j$ 。它持有 $|G| = O(\epsilon^{-d}km)$, 它是在 $O(\epsilon^{-d}nk)$ 时间建造的。如果我们将定理 ?? 中的结果与常数 ϵ 的核心集构造结合起来, 我们得到一个算法, 该算法在 $O(kn + (km)^\lambda)$ 时间内返回一个具有 $\text{div}(S) \geq \frac{1}{2(1+\epsilon)}\gamma^*$ 的集合 S , 使得对于每种颜色 c_j , $\mathbb{E}[|S(c_j)|] \geq k_j$ 。To satisfy fairness exactly, we can combine the coreset with the Fair-Greedy-flow algorithm [?] to get a $\frac{1}{(m+1)(1+\epsilon)}$ -approximation in $O(kn + k^2m^4 \log k)$ time.

高概率的多样性。上述所有结果, 返回满足期望公平性的一组 S 。作者在 [?] 中将结果扩展为至少 $1 - 1/n$ 的概率, 也称为高概率。给定 \hat{x} , 来自 (LP ??) 的解, 他们将其转换为以下 (非线性) 可行性问题的解 \hat{y} 。

$$(FP1) \quad \sum_{p_i \in P(c_j)} y_i \geq k_j, \quad \forall c_j \in C \quad (4)$$

$$\sum_{p_i \in P \cap \mathcal{B}(p, \gamma/6)} y_i \leq 1, \quad \forall p \in P \quad (5)$$

$$y_i \geq 0, \quad \forall p_i \in P \quad (6)$$

$$y_i > 0 \text{ and } y_\ell > 0 \Rightarrow \|p_i - p_\ell\| \geq \frac{\gamma}{3}, \quad (7)$$

$$\forall p_i, p_\ell \in P(c_j), \forall c_j \in C$$

如果每个 $c_j \in C$ 都 $k_j \geq 3\epsilon^{-2} \log(2m)$, 作者表明, 如果他们应用与前一种情况相同的舍入技术, 他们返回一个集合 S , 使得 $\text{div}(S) \geq \gamma^*/6$, 其中 $|S(c_j)| \geq \frac{k_j}{1-\epsilon}$ 对于每个 $c_j \in C$, 概率至少为 $1 - 1/n$ 。不幸的是, 他们仍然需要求解 (LP ??) 才能得出这个结果。即使没有求解 (LP ??), 他们提出的将解从 (LP ??) \hat{x} 转换为 (FP ??) \hat{y} 的解的算法也需要 $\Omega(n^2)$ 时间。因此, 整体运行时间是超二次的。如果使用核心集, 那么我们在 $O(kn + (mk)^{2.37})$ 的时间内得到一个 $\frac{1}{6(1+\epsilon)}$ 近似算法, 以高概率满足公平性约束。

Geometric data structures. 我们将在下一节中介绍我们使用的主要几何数据结构。

BBD 树. 我们使用的主要几何数据结构是 BBD-tree [??], 它是 quadtree [?] 的变体。在 \mathbb{R}^d 中 n 个点的集合 P 上 \mathcal{T} 的 BBD 树是高度为 $O(\log n)$ 的二叉树, 正好有 n 片叶子。设 \square 是包含 P 的最小轴对齐超立方体。 \mathcal{T} 的每个节点 u 都与一个区域 \square_u 相关联, 该区域可以是矩形, 也可以是两个嵌套矩形之间的区域, 以及位于内部的点的子集 $P_u \subseteq P \cap \square_u$ 。请注意, $\square_{root} = \square$ 。如果 $|P_u| = 1$, 则 u 是一片叶子。如果 $|P_u| > 1$, 那么 u 有两个孩子, 比如 w 和 z , 以及 \square_w 和 \square_z 分区 \square_u 。与 \mathcal{T} 节点关联的区域会引起 \mathbb{R}^d 的分层分区。BBD 树具有 $O(n)$ 空间, 可以在 $O(n \log n)$ 时间内建造。给定一个参数 $\epsilon \in (0, 1)$ 和一个球 $\mathcal{B}(x, r)$ in \mathbb{R}^d , BBD 树运行查询过程 $\mathcal{T}(x, r)$, 返回一组从 \mathcal{T} $\mathcal{U}(x, r) = \{u_1, \dots, u_\kappa\}$ 的节点 (也称为规范节点 $\kappa = O(\log n + \epsilon^{-d})$), $O(\log n + \epsilon^{-d})$ 时间内, 使得每对 $\square_{u_i} \cap \square_{u_j} = \emptyset$ $1 \leq i < j \leq \kappa$, 和 $\mathcal{B}(x, r) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq \kappa} \square_{u_i} \subseteq \mathcal{B}(x, (1+\epsilon)r)$ 。通过报告 $i \leq \kappa$ P_{u_i} 的所有点, BBD 树可用于报告 $P \cap \mathcal{B}(x, r)$ 中的所有点以及来自 $P \cap (\mathcal{B}(x, (1+\epsilon)r) \setminus \mathcal{B}(x, r))$ 中的一些点。

²无论如何, $\lambda \geq 2$ 。目前, 求解 LP 的最佳理论算法有 $\lambda \geq 2.37$ [?]

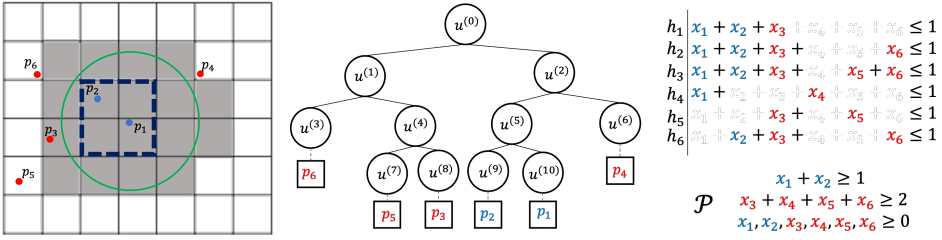


Fig. 2. 左：输入点集。中图：简化的 BBD 树，右图：决策问题 $\exists x \in \mathcal{P}$ s.t. $h^\top Ax \leq b$.

WSPD 的 . 使用四叉树 [?], 有人可以在 $P \in \mathbb{R}^d$ 中得到一个分离对分解 (WSPD) [??]. 在 $O(\varepsilon^{-d}n \log n)$ 时间里, 我们可以构造一个 $z = O(\varepsilon^{-d}n)$ 距离的列表 $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_z\}$, 这样对于每对 $p, q \in P$, 都存在 $L_j \in \mathcal{L}$, 使得 $(1 - \varepsilon)\|p - q\| \leq L_j \leq (1 + \varepsilon)\|p - q\|$.

Multiplicative Weight Update (MWU) method. 采用 MWU 方法求解以下线性可行性问题。

$$\exists x \in \mathcal{P} : Ax \leq b, \quad (8)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m' \times n'}$ 、 $x \in \mathbb{R}^{n'}$ 、 $b \in \mathbb{R}^{m'}$ 、 $Ax \geq 0$ 、 $b \geq 0$ 和 \mathcal{P} 是 $\mathbb{R}^{n'}$ 中的凸集。直观地说, \mathcal{P} 捕获要满足的“简单”约束, 而 A 表示要满足的“困难”约束。作者在 [?] 描述了一种使用简单 ORACLE 的迭代算法。假设 ORACLE 是一个黑盒过程, 用于求解概率向量 $h \in \mathbb{R}^{m'}$ 的以下单个线性约束。

$$\exists x \in \mathcal{P} : h^\top Ax \leq h^\top b. \quad (9)$$

ORACLE 确定是否存在满足单个线性约束的 x 。否则, 它将返回没有可行的解决方案。 ρ -ORACLE 是一个 ORACLE, 每当 ORACLE 设法找到 \hat{x} problem (??) 的可行解决方案时, $A_i \hat{x} - b_i \in [-1, \rho]$ 每个约束 $i \in [m']$, 其中 A_i 是 A 的第 i 行。

该算法首先将 h 初始化为值为 $1/m'$ 的均匀概率向量。在每次迭代中, 该算法求解方程 (??)。如果 (??) 不可行, 则返回方程 (??) 中的原始可行性问题不可行。设 $x^{(t)}$ 是公式 (??) 算法 t 迭代中问题的解。让 $\delta_i = \frac{1}{\rho}(A_i x^{(t)} - b_i)$ 。我们更新 $h[i] = (\delta_i \cdot \varepsilon/4 - 1)h[i]$, 其中 $h[i]$ 是向量 h 的第 i 个元素。在下次迭代中, 我们将继续定义一个关于新概率向量 h 的新可行性问题。经过 $T = O(\rho \log(m')/\varepsilon^2)$ 迭代后, 如果每个预言机都可行, 它们将返回 $x^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x^{(t)}$ 。否则, 如果预言机不可行, 他们就会认为最初的问题是可行。Overall, every algorithm using the MWU method to solve a problem in the form of Equation (??) should implement two procedures: Oracle(\cdot) that implements a ρ -ORACLE and Update(\cdot) that updates the probability vector h . In [?] 他们证明了以下定理。

THEOREM 2.2 ([?]). *Given a feasibility problem as defined above, a parameter ε , a ρ -ORACLE implemented in procedure Oracle(\cdot), and an update procedure Update(\cdot), there is an algorithm which either finds an x such that $\forall i, A_i x_i \leq b_i + \varepsilon$ or correctly concludes that the system is infeasible. The algorithm makes $O(\rho \log(m')/\varepsilon^2)$ calls to procedures Oracle(\cdot) and Update(\cdot).*

3 高效的 FAIRDIV 算法

在本节中, 我们提出了两种有效的算法来应对 FairDiv 问题。第一个保证了期望的近似公平性, 而第二个保证了高概率的近似公平性。

3.1 期望的多样性

High-level idea. Recall the LP-based algorithm proposed in [?]: solve (LP ??) using an LP solver and then round the solution as described in Section ?? . We design a new algorithm that uses the MWU approach to solve a modified feasibility problem. While the MWU approach can

work directly on (LP ??) it takes $\Omega(n^2)$ time to run. Instead, we define a new linear feasibility problem, called (LP ??) and we use the MWU method to approximately solve (LP ??) in near-linear time. Finally, we round its fractional solution to return a valid solution for the FairDiv problem in near-linear time using advanced geometric data structures.

Assume that γ is a pairwise distance among the items in P . Our algorithm checks whether there exists a set $S \subseteq P$ that satisfies the fairness constraints such that $\text{div}(S) \geq \frac{\gamma}{2(1+\epsilon)}$. We map this decision problem to a new linear feasibility problem (LP ??). The Constraints (??) and Constraints (??) from (LP ??) remain the same. However, we slightly modify Constraints (??). For a point p we define a set $S_p^\epsilon \subseteq P$ denoting its “neighboring” points, with a definition of neighboring which is convenient for the data structure we use. The set S_p^ϵ contains all points within distance $\frac{\gamma}{2(1+\epsilon)}$ from p , might contain some points within distance $\gamma/2$, and no point with distance more than $\gamma/2$. The properties of the BBD tree are used to formally define S_p^ϵ . We define $S_p^\epsilon = \{p \in \square_{u_i} \cap P \mid u_i \in \mathcal{U}(p, \frac{\gamma}{2(1+\epsilon)})\}$, i.e., the set of points in the canonical nodes returned by query $\mathcal{T}(p, \frac{\gamma}{2(1+\epsilon)})$. We replace Constraints (??) with $\sum_{p_i \in S_p^\epsilon} x_i \leq 1, \forall p \in P$. Overall, the new feasibility problem is:

$$(LP2) \quad \sum_{p_i \in P(c_j)} x_i \geq k_j \quad \forall c_j \in C \quad (10)$$

$$\sum_{p_i \in S_p^\epsilon} x_i \leq 1 \quad \forall p \in P \quad (11)$$

$$1 \geq x_i \geq 0, \quad \forall p_i \in P \quad (12)$$

We use the MWU method to compute a feasible solution for (LP ??). Recall that the MWU method solves feasibility problems in the form of Equation (??), $\exists x \in \mathcal{P} : Ax \leq b$. Next, we show that (LP ??) can be written in this form by defining \mathcal{P} , A , and b .

Instead of considering that the trivial constraints \mathcal{P} contains only the inequalities $1 \geq x_i \geq 0$, we assume that Constraints (??) are also trivial and contained in \mathcal{P} . This will allow us later to design a k -ORACLE. The set \mathcal{P} is convex because it is defined as the intersection of $m+n$ halfspaces in \mathbb{R}^n . Hence, it is valid to use the MWU method. The new Constraints (??) define the binary square matrix A , having one row for every point $p \in P$. The value $A[\ell, i] = 1$ if $p_i \in S_p^\epsilon$, otherwise it is 0. Finally, b is defined as a vector in \mathbb{R}^d with all elements being 1. From Theorem ??, we know that the MWU method returns a solution that satisfies the constraints in \mathcal{P} (Constraints (??) and (??)) exactly, while the Constraints (??) are satisfied with an ϵ additive error.

A straightforward implementation of the MWU method over (LP ??) would still take super-quadratic time to run; even the computation of A takes $O(n^2)$ time. Our new algorithm does not construct the matrix A explicitly. Likewise, it does not construct the sets S_p^ϵ explicitly. Instead, we use geometric data structures to implicitly represent A and S_p^ϵ and execute our algorithm in near-linear time.

在我们继续我们的方法之前，我们注意到已经有很多工作与使用 MWU 方法隐式求解计算几何中的特殊类 LP 有关 [??]. 尽管我们的问题具有几何性质，但据我们所知，所有以前隐含地解决 LP 的（几何）技术都没有扩展到我们的问题。例如，在 [?] 中，他们描述了使用 MWU 方法解决几何问题的算法，其运行时间线性地取决于矩阵 A 中非零数的数量。在我们的问题定义中， A 中可能有 $O(n^2)$ 个非零数，因此这些算法不能用于推导我们问题的近线性时间算法。在 [??] 中，他们还为一一些几何问题提供了近线性时间常数近似算法，例如几何集覆盖，圆盘覆盖点，或者与我们的问题更相关的最大独立圆盘集。但是，我们的问题定义有三个主要区别：i) 这些算法仅在 \mathbb{R}^2 或 \mathbb{R}^3 中起作用。我们提出了任何常数维

数 d 的近似算法。ii) 他们不考虑公平约束，也不清楚如何扩展其方法以满足公平约束。iii) FairDiv 中的优化问题与他们研究的优化问题不同。

Example. We use a toy example to describe our new algorithm in the next paragraphs. In Figure ?? (Left) we show the input points that consists of two blue points p_1, p_2 and four red points p_3, p_4, p_5, p_6 . Let blue color be c_1 and red color be c_2 . The goal is to solve the FairDiv problem among the five points with $k_1 = 1$ and $k_2 = 2$, i.e., our solution should contain at least one blue and at least two red points. Throughout the example, we assume that $\gamma = 5$ and $\varepsilon = 1$. In Figure ?? (Middle) we show a simplified version of the BBD tree constructed on the input set. Each node corresponds to a rectangle in \mathbb{R}^d . For example, the node $u^{(5)}$ corresponds to the dashed rectangle that contains p_1 and p_2 in Figure ?? (Left). The leaf nodes in the BBD tree correspond to the non-empty cells in Figure ?? (Left). For simplicity, we assume that each grid cell has diagonal 1 (which is equal to the maximum error ε). Consider the blue point p_1 . The green circle with center p_1 has radius $\gamma/(2(1 + \varepsilon)) = 1.25$. By definition, all points that lie in grid cells that are intersected by the green circle (the gray cells in Figure ?? (Left)) belong in $S_{p_1}^\varepsilon$, i.e. $S_{p_1}^\varepsilon = \{p_1, p_2, p_3\}$. Notice that $p_3 \in S_{p_1}^\varepsilon$ because the green circle around p_1 intersects the grid cell (associated with the node $u^{(8)}$) that p_3 belongs to. On the other hand $p_4 \notin S_{p_1}^\varepsilon$. Interestingly, $S_{p_4}^\varepsilon = \{p_1, p_4\}$ because a ball of radius 1.25 and center p_4 intersects the cell that p_1 belongs to. We also have $S_{p_2}^\varepsilon = \{p_1, p_2, p_3, p_6\}$, $S_{p_3}^\varepsilon = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}$, $S_{p_5}^\varepsilon = \{p_3, p_5\}$, and $S_{p_6}^\varepsilon = \{p_2, p_3, p_6\}$. Using the sets S_p^ε , in Figure ?? (Right), we show the (LP ??) for our instance. The trivial constraints \mathcal{P} are shown in the bottom, while the main constraints are shown at the top.

New Algorithm. Our new algorithm is called M ultiplicative weight update method for F air D iversification (MFD) and it is described in Algorithm ?. First it computes a sorted array Γ of (candidates of) pairwise distances in P . Then it runs a binary search on Γ . Lines 2, 4, 5, 13, 14, 16 are all trivial executing the binary search on Γ . Each time we find a feasible (infeasible) solution for our optimization problem (LP ??) we try larger (smaller) values of γ . For a particular $\gamma \in \Gamma$, in lines 4–16 we use the MWU method to solve (LP ??). The algorithm follows the MWU method as described in the end of Section ?. In particular, for at most $T = O(\varepsilon^{-2} \rho \log n)$ iterations, it calls Oracle(\cdot) in line 9 to decide whether there exists x such that $h^\top Ax \leq h^\top b$ and $x \in \mathcal{P}$. Recall that in our case $b \in \mathbb{R}^n$ and $b = \{1, \dots, 1\}$, so it is sufficient to decide whether there exists x such that $h^\top Ax \leq \sum_\ell h[\ell] \Leftrightarrow h^\top Ax \leq 1$ and $x \in \mathcal{P}$. If Oracle() returns a feasible solution \bar{x} , in line 11 it updates the final solution \hat{x} and uses the Update(\cdot) procedure to update the vector h based on \bar{x} . If all T iterations return feasible solutions, in line 15 it computes the final solution of (LP ??) for a given γ . In the end, in line 17 we run a rounding procedure to derive the final set of points S . Overall, the algorithm follows the high level idea of the LP-based algorithm in [?], using the MWU method [?] instead of an LP solver. If Q_Γ, Q_O, Q_U, Q_R is the running time to compute Γ , and run Oracle(\cdot) Update(\cdot), and Round(\cdot), respectively, then the overall running time of Algorithm ? is $O(Q_\Gamma + (\varepsilon^{-2} \rho \log n)(Q_O + Q_U + n) \log |\Gamma| + Q_R)$. Using the results in [?] and [?], $Q_\Gamma, Q_O, Q_U, Q_R = \Omega(n^2)$, leading to a super-quadratic time algorithm. In the next paragraphs, we use geometric tools to show how we can find a set Γ and run all the procedures Oracle, Update, Round only in near-linear time using only linear space with respect to n . We also show that $\rho = k$.

The Oracle(\cdot) procedure. We design a k -ORACLE procedure as defined in Section ?. The goal is to decide whether there exists x such that $h^\top Ax \leq 1$ and $x \in \mathcal{P}$. We note that Oracle(\cdot) does not compute the matrix A explicitly. 事实上, $h^\top Ax$ 可以写成 $\sum_{p_i \in P} \alpha_i x_i$, 对于一些实系数 α_i . 直观地说, 对于每个颜色 c_j , 我们的目标是找到具有颜色 c_j 的 k_j 点, 具有最小的系数 α_i . 我们的算法首先找到 α_i 的所有系数, 然后从每个颜色 c_j 中选择 k_j 最小的系数。这样, 我们 \bar{x} 找到了解决方案, 可以最大限度地减少 $\bar{x} \in \mathcal{P} h^\top A \bar{x}$ 。最后, 我们检查是否 $h^\top A \bar{x} \leq 1$ 。

Algorithm 1: $\text{MFD}(P, \varepsilon, k_1, \dots, k_m)$

```

1  $\Gamma \leftarrow$  Sorted array of pairwise distances in  $P$ ;
2  $M_l \leftarrow 0$ ,  $M_u \leftarrow |\Gamma| - 1$ ,  $k \leftarrow k_1 + \dots + k_m$ ;
3  $T \leftarrow O(\varepsilon^{-2} \rho \log n)$ ;
4 while  $M_l \neq M_u$  do
5    $M \leftarrow \lceil (M_l + M_u)/2 \rceil$ ,  $\gamma \leftarrow \Gamma[M]$ ;
6    $\hat{x} \leftarrow (0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ ;
7    $h \leftarrow (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^\top \in \mathbb{R}^n$ ;
8   for  $1, \dots, T$  do
9      $\bar{x} \leftarrow \text{Oracle}(P, h, \gamma, \varepsilon, k_1, \dots, k_m)$ ;
10    if  $\bar{x} \neq \emptyset$  then
11       $\hat{x} \leftarrow \hat{x} + \bar{x}$ ;
12       $h \leftarrow \text{Update}(P, \bar{x}, \gamma, \varepsilon)$ ;
13    else
14       $M_u \leftarrow M - 1$ , Go to Line 4;
15   $\hat{x} \leftarrow \hat{x}/T$ ;
16   $M_l \leftarrow M$ ;
17  $S \leftarrow \text{Round}(P, \varepsilon, \hat{x})$ ;
18 return  $S$ ;

```

Algorithm 2: $\text{Oracle}(P, h, \gamma, \varepsilon, k_1, \dots, k_m)$

```

1  $\mathcal{T} \leftarrow$  BBD tree on  $P$ ;
2 foreach  $u \in \mathcal{T}$  do  $u_s \leftarrow 0$ ;
3 foreach  $p_\ell \in P$  do
4    $\mathcal{U}_{p_\ell} \leftarrow \mathcal{T}(p_\ell, \frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)})$ ;
5   foreach  $u \in \mathcal{U}_{p_\ell}$  do  $u_s \leftarrow u_s + h[\ell]$ ;
6 foreach  $p_i \in P$  do
7    $w_i \leftarrow 0$ ;
8    $v \leftarrow$  leaf node of  $\mathcal{T}$  such that  $p_i \in \square_v \cap P$ ;
9   foreach  $u$  in the path from  $v$  to the root of  $\mathcal{T}$  do
10     $w_i \leftarrow w_i + u_s$ ;
11  $\bar{x} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ ;
12 foreach  $c_j \in C$  do
13    $W_j \leftarrow k_j$ -th smallest weight in  $\{w_i \mid p_i \in P(c_j)\}$ ;
14    $P_j \leftarrow \{p_i \in P(c_j) \mid w_i \leq W_j\}$ ;
15   foreach  $p_i \in P_j$  do  $\bar{x}_i = 1$ ;
16 if  $\sum_{p_i \in P} \bar{x}_i w_i \leq 1$  then return  $\bar{x}$ ;
17 else return  $\emptyset$  (Infeasible);

```

我们得到一个概率向量 $h \in \mathbb{R}^n$ 。每个值 $h[i] \in h$ 对应于矩阵 A 的第 i 行的权重。换言之，每个点 $p_\ell \in P$ 都与权重 $h[\ell]$ 相关联。我们在加权点 \mathcal{T} 构建了一个略微修改的 BBD 树 P 。设

\mathcal{T} 是 Section ?? 中描述的树，位于 P 的点集上。对于每个节点 $u \in \mathcal{T}$ ，我们初始化一个权重 $u_s = 0$ 。数据结构 \mathcal{T} 空间 $O(n)$ ，可以在 $O(n \log n)$ 时间内构建。

使用我们修改后的 BBD 树 \mathcal{T} ，在 Algorithm ?? 中，我们展示了如何检查是否存在 \bar{x} ，使得 $h^\top A \bar{x} \leq 1$ 和 $\bar{x} \in \mathcal{P}$ 。对于每个 $p_\ell \in P$ ，我们运行查询 $\mathcal{T}(p_\ell, \frac{Y}{2(1+\epsilon)})$ ，并得到一组规范节点 $\mathcal{U}_{p_\ell} := \mathcal{U}(p_\ell, \frac{Y}{2(1+\epsilon)})$ 。对于每个节点 $u \in \mathcal{U}_{p_\ell}$ ，我们更新 $u_s \leftarrow u_s + h[u]$ 。在考虑了所有点之后，我们重新审视每个点 $p_i \in P$ 并继续如下：我们初始化一个权重 $w_i = 0$ 。我们从包含 p_i 的叶节点开始，自下而上遍历 \mathcal{T} 直到到达 BBD 树的根。 v 成为我们穿越的节点；我们更新 $w_i = w_i + v_s$ 。在计算了所有值之后 w_i ，对于每种颜色 c_j ，我们从权重最小的 $P(c_j)$ 中找到 k_j 点 w_i 。让我们 P_j 成为这些要点。对于每个 $p_i \in P_j$ ，我们设置 $\bar{x}_i = 1$ 。否则，如果 $p_i \notin P_j$ 和 $c(p_i) = c_j$ ，我们设置 $\bar{x}_i = 0$ 。如果 $\sum_{p_i \in P} w_i \bar{x}_i \leq 1$ 预言机返回 \bar{x} 作为可行的解决方案。否则，它将返回没有可行的解决方案。

正确性证明。 我们证明我们设计的 ORACLE 是正确的。我们首先证明 $\alpha_i = w_i$ 如此 $h^\top A x = \sum_{p_i \in P} w_i x_i$ 。回想一下 $h^\top A x = \sum_{p_i \in P} \alpha_i x_i$ ，对于实系数 α_i 。根据定义，每个 α_i 都定义为 $\alpha_i = \sum_{p_\ell \in P} h[\ell] \cdot \mathcal{I}(p_i \in S_{p_\ell}^c)$ ，其中 $\mathcal{I}(p_i \in S_{p_\ell}^c) = 1$ 如果 $p_i \in S_{p_\ell}^c$ ，则 0 否则。如果 $p_i \in S_{p_\ell}^c$ 则根据定义， α_i 包含一项 $h[\ell]$ 在总和中。还存在一个节点 $u \in \mathcal{U}_{p_\ell}$ 使得 $p_i \in \square_u \cap P$ ，即 p_i 位于根于 u 的子树的叶节点中。从包含 p_i 的叶子开始，我们的算法将始终访问节点 u ，并且由于 $u \in \mathcal{U}_{p_\ell}$ 我们有 $h[\ell]$ 是总和中的项 u_s 因此通过更新 $w_i = w_i + u_s$ 我们将项 $h[\ell]$ 包含在权重 w_i 中。总的来说，我们有这个 $w_i = \alpha_i$ ，我们的算法在线函数 $h^\top A x$ 中找到所有正确的系数。然后，我们专注于最小化总和 $\sum_{p_i \in P} w_i x_i$ 满足 $x \in \mathcal{P}$ 。对于每种颜色 c_j ，我们都应该满足 $\sum_{p_i \in P(c_j)} x_i \geq k_j$ 。我们可以重写 $\sum_{p_i \in P} w_i x_i = \sum_{c_j \in C} \sum_{p_i \in P(c_j)} w_i x_i$ 。请注意，对于部分和中 $w_i k_j$ 因子 $\bar{x}_i = 1$ $x \in \mathcal{P}$ 设置，部分和 $\sum_{p_i \in P(c_j)} w_i x_i$ 最小化。每个点都有独特的颜色，因此没有属于两个不同部分和的点 p_i 。对每个颜色 $c_j \in C$ 重复相同的参数，我们得出结论，我们的算法确实找到了满足 $x \in \mathcal{P}$ $\sum_{p_i \in P} w_i x_i$ 的最小值。总体而言，我们的算法正确地返回了 $x \in \mathcal{P}$ $h^\top A x \leq 1$ 可行性问题的可行性问题是否可行。

Let \bar{x} be the feasible solution returned by Oracle(\cdot) . Notice that by definition, \bar{x} sets k variables to 1 . Hence, for each Constraint (??), it holds that $A_i \bar{x} - b_i \leq k - 1$ and $A_i \bar{x} - b_i \geq -1$, where A_i is the i -th row of A . Similarly, we can write $A_i \bar{x} \leq k$ and $A_i \bar{x} \geq 0$ since $b_i = 1$. We conclude that our Oracle procedure computes a k -ORACLE as defined in [?], so $\rho = k$.

Example (cont). We show the execution of Algorithm ?? in our example. Assume that $h^\top = [1, 1, 1, 1, 4, 2]$, with $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 1$. By the definition of canonical subsets in the BBD tree, we have $\mathcal{U}_{p_1} = \{u^{(5)}, u^{(8)}\}$, $\mathcal{U}_{p_2} = \{u^{(5)}, u^{(8)}, u^{(3)}\}$, $\mathcal{U}_{p_3} = \{u^{(1)}, u^{(5)}\}$, $\mathcal{U}_{p_4} = \{u^{(6)}, u^{(10)}\}$, $\mathcal{U}_{p_5} = \{u^{(4)}\}$, and $\mathcal{U}_{p_6} = \{u^{(3)}, u^{(8)}, u^{(9)}\}$. Hence, from lines 3–5 we get $u_s^{(1)} = h_2 + h_3 = 0.2$, $u_s^{(3)} = h_1 = 0.3$, $u_s^{(4)} = h_6 = 0.1$, $u_s^{(5)} = h_4 + h_5 = 0.4$, $u_s^{(6)} = h_4 = 0.05$, $u_s^{(7)} = h_6 = 0.1$, $u_s^{(8)} = h_1 = 0.3$, and all the rest $u_s^{(i)} = 0$. Then in lines 6–10 we compute the coefficients w_i . For example consider p_1 . We compute $w_1 = u_s^{(10)} + u_s^{(5)} + u_s^{(2)} + u_s^{(0)} = 0.4$. Similarly, we compute $w_2 = 0.5$, $w_3 = 0.9$, $w_4 = 0.1$, $w_5 = 0.5$, and $w_6 = 0.4$. We observe that these are indeed the correct coefficients in the inequality $h^\top A x \leq 1$. For instance, the coefficient of x_1 is $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0.4 = w_1$. Overall, we have $h^\top A x = 0.4 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 0.9 \cdot x_3 + 0.1 \cdot x_4 + 0.5 \cdot x_5 + 0.4 \cdot x_6$ and we correctly identified all coefficients. Then in line 13 among the blue points we choose the smallest weight, $W_1 = w_1 = 0.4$ and among the red points we choose the second smallest weight $W_2 = w_6 = 0.4$. Hence, $P_1 = \{p_1\}$ and $P_2 = \{p_4, p_6\}$ and the algorithm sets $\bar{x}^\top = [1, 0, 0, 1, 0, 1]$. Finally, in line 16 the algorithm computes $w_1 + w_4 + w_6 = 0.4 + 0.4 + 0.1 = 0.9 < 1$ so \bar{x} is a feasible solution.

运行时间。 对于每个新的概率向量 h 我们在 $O(n \log n)$ 时间内构造 \mathcal{T} 。对于每个点 p_i 我们都会在 $O(\log n + \epsilon^{-d})$ 时间内找到 \mathcal{U}_{p_i} 。此外， \mathcal{T} 的高度是 $O(\log n)$ 的，因此对于每个

Algorithm 3: Update ($P, \bar{x}, \gamma, \varepsilon$)

```

1  $\mathcal{T} \leftarrow$  BBD tree on  $P$  ;
2 foreach  $u \in \mathcal{T}$  do  $u_w \leftarrow 0$  ;
3 foreach  $p_i \in P$  such that  $\bar{x}_i > 0$  do
4    $v \leftarrow$  leaf node of  $\mathcal{T}$  such that  $p_i \in \square_v \cap P$  ;
5   foreach  $u$  in the path from  $v$  to the root of  $\mathcal{T}$  do
6      $u_w \leftarrow u_w + \bar{x}_i$  ;
7 foreach  $p_\ell \in P$  do
8    $\mathcal{U}_{p_\ell} \leftarrow \mathcal{T}(p_\ell, \frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)})$  ;
9    $R_\ell = \sum_{u \in \mathcal{U}_{p_\ell}} u_w$  ;
10   $\delta_\ell = |R_\ell - 1|$  ;
11 Update  $h$  using  $\delta_\ell$  's as described in [?] ;
12 return  $h$  ;

```

点 p_i 我们需要额外的 $O(\log n)$ 时间来计算 w_i 。计算权重后，我们找到线性时间内每种颜色的最小 k_j 。总体而言， $Q_O = O(n \log n + n\varepsilon^{-d})$ 。

The Update(\cdot) procedure. 接下来，我们将介绍如何在每次迭代开始时有效地更新 h 。让我们 \bar{x} 成为上一次迭代中预言机的解决方案。设 $\delta_\ell = |A_\ell \bar{x} - b_\ell| = |A_\ell \bar{x} - 1|$ ，其中 A_ℓ 是 A 的第 ℓ 行 (ℓ -th 约束 in (??))。在 [?] 他们在计算 δ_ℓ 后以恒定的时间更新每个 $h[\ell]$ 。在我们的例子中，如果我们试图用一种微不足道的方式计算所有 δ_ℓ ，我们将需要 $\Omega(nk)$ 时间，从而产生一个 $\Omega(nk^2)$ 时间的整体算法。在 Algorithm ?? 中，我们展示了一种计算所有 δ_ℓ 的更快方法。我们的 Oracle 方法将变量 \bar{x} 设置为 $1/k$ 变量。对于每个 $p_\ell \in P$ ，目标都是找到 $A_\ell \bar{x} = \sum_{p_i \in S_{p_\ell}^c} \bar{x}_i = \sum_{p_i \in S_{p_\ell}^e, \bar{x}_i > 0} \bar{x}_i$ 。我们按如下方式修改 \mathcal{T} 。对于每个节点 $u \in \mathcal{T}$ 我们定义变量 $u_w = 0$ 。对于每个有 $\bar{x}_i > 0$ p_i ，我们从含有 p_i 的叶子开始，然后我们访问树的底部，直到我们到达根部。对于我们遇到的每个节点 u ，我们更新 $u_w = u_w + \bar{x}_i$ 。修改 \mathcal{T} 后，对于每个约束/点 p_ℓ ，我们运行查询 $\mathcal{T}(p_\ell, \frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)})$ ，得到 \mathcal{U}_{p_ℓ} 的规范节点集。我们计算 $R_\ell \leftarrow \sum_{u \in \mathcal{U}_{p_\ell}} u_w = \sum_{p_i \in S_{p_\ell}^e} \bar{x}_i = A_\ell \bar{x}$ 。我们返回 $\delta_\ell = |R_\ell - 1|$ 。正确性是通过观察 A 的第 ℓ 行中 p_i 变量的系数 1 当且仅当 $p_i \in S_{p_\ell}^e$ 。我们需要 $O(n)$ 时间来计算通过自下而上遍历树 \mathcal{T} v_w 的所有值。然后，对于每个 p_ℓ ，我们在 \mathcal{T} 上运行一个范围查询，因此我们需要 $O(\log n + \varepsilon^{-d})$ 。总体而言， $Q_U = O(n \log n + n\varepsilon^{-d})$ 。

Example (cont). We show the execution of the Update procedure using our example in Figure ??, assuming that $\bar{x}^\top = [1, 0, 1, 0, 1, 0]$. By definition, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 2$, $\delta_4 = 0$, $\delta_5 = 1$, and $\delta_6 = 0$. In lines 4–6, for p_1 we start from $u^{(10)}$ and we traverse the tree bottom-up. We set $u_w^{(10)} = u_w^{(5)} = u_w^{(2)} = u_w^{(0)} = \bar{x}[1] = 1$. After traversing all points we have, $u_w^{(10)} = 1$, $u_w^{(5)} = 1$, $u_w^{(2)} = 1$, $u_w^{(7)} = 1$, $u_w^{(8)} = 1$, $u_w^{(4)} = 2$, $u_w^{(1)} = 2$, $u_w^{(0)} = 3$, and all the other nodes have weight 0. Then in line 10, we compute δ_ℓ for each p_ℓ . For p_1 , we get $\mathcal{U}_{p_1} = \{u^{(5)}, u^{(8)}\}$, so $R_1 = u_w^{(5)} + u_w^{(8)} = 2$, and $\delta_1 = |2 - 1| = 1$. Similarly, we compute the other δ_ℓ 's.

The Round(\cdot) procedure. The real vector \hat{x} we get satisfies (LP ??) approximately. From the MWU method (see Theorem ??) the Constraints in \mathcal{P} , (Constraints (??) and (??)) are satisfied exactly, however the Constraints (??) are satisfied approximately. In fact, it holds that

$$\sum_{p_i \in S_p^c} \hat{x}_i \leq 1 + \varepsilon, \quad \forall p \in P \quad (13)$$

Algorithm 4: Round (P, ε, \hat{x})

```

1  $F \leftarrow P$ ;
2  $\Xi \leftarrow$  BBD tree for sampling on  $F$ ;
3 foreach  $u \in \Xi$  do  $u_b \leftarrow 1$ ;
4 while  $F \neq \emptyset$  do
5    $p_i \leftarrow \Xi.\text{sample}()$ ,  $F \leftarrow F \setminus \{p_i\}$ ;
6    $\mathcal{U}_{p_i} \leftarrow \Xi(p_i, \frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)})$ ;
7   if  $u_b == 1$  for every  $u \in \mathcal{U}_{p_i}$  then
8      $S \leftarrow S \cup \{p_i\}$ ;
9    $v \leftarrow$  leaf node of  $\Xi$  such that  $p_i \in \square_v \cap P$ ;
10  foreach  $u$  in the path from  $v$  to the root of  $\Xi$  do  $u_b \leftarrow 0$ ;
11 return  $S$ ;

```

我们遵循从 [?] 随机舍入的修改版本 \hat{x} 四舍五入，并返回一个集合 $S \subseteq P$ 作为 FairDiv 问题的解决方案。我们的舍入方法与舍入方法有很大区别 in [?] (在 Section ?? 中也有简要描述)，因为 i) 约束 (??) 与约束 (??) 有很大不同，因为后者满足于加法误差 ε ，并且它们的总和超过集合 S_p^c ，ii) in [?] 的舍入技术是相对于点数在二次时间内执行的。我们提出了一种近线性时间算法来执行舍入。

在描述实际的舍入算法之前，我们先描述一个修改后的 BBD 树，我们将使用它来有效地采样。对于每个 $p_i \in P$ 点，我们将其权重定义为 \hat{x}_i 。设 Ξ 在加权集 P 上构造的 BBD 树。我们修改 Ξ ，以便我们可以用概率 $\frac{\hat{x}_i}{\sum_{j \in F} \hat{x}_j}$ 对点 p_i 进行采样，其中 $F \subseteq P$ 是 P 的子集。对于每个节点 $u \in \Xi$ ，我们存储值 $u_s = \sum_{p_\ell \in \square_u \cap P} \hat{x}_\ell$ ，即存储在 u 子树中的所有点的 \hat{x}_i 之和。最初 $F = P$ 。我们按如下方式进行采样：假设任何节点 u 有两个子节点 v, e 。我们以概率 $v_s / (v_s + e_s)$ 访问 v ，我们以概率 $e_s / (u_s + e_s)$ 访问 e 。当我们在 F 中插入一个点 p_i 时，我们从存储 p_i 的叶节点开始，然后访问树底部，更新我们遍历 u 节点的值 $u_s \leftarrow u_s - \hat{x}_i$ 。通过这种方式，我们从树中“删除”了点 p_i 的权重，并且在下一次采样迭代中不考虑它。不难看出，此过程保证了每个点 p_i 都以概率 $\frac{\hat{x}_i}{\sum_{j \in F} \hat{x}_j}$ 选择。为了确保我们不会为每个节点选择两个附近的点 $u \in \Xi$ 我们还设置了一个布尔变量 $u_b = 1$ 。如果 $u_b = 1$ 则意味着我们的算法尚未对位于 $\square_u \cap P$ 中的点进行采样。如果 $u_b = 0$ 则意味着我们已经在上一次迭代中对 $\square_u \cap P$ 中的某个点进行了采样，因此我们不应该重新考虑节点 u 来获取新样本。

让我们 $S = \emptyset$ 成为我们为 FairDiv 问题返回的一组点。让我们 $F = P$ 表示我们可以从中采样的一组点，如上一段所述。使用 Ξ ，我们以概率 $\frac{\hat{x}_i}{\sum_{p_\ell \in F} \hat{x}_j}$ 对点 p_i 进行采样。我们更新 $F \leftarrow F \setminus \{p_i\}$ 。接下来，我们运行一个查询 $\Xi(p_i, \frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)})$ ，我们得到一组 $O(\log n + \varepsilon^{-d})$ 规范节点 \mathcal{U}_{p_i} 。如果每个 $u \in \mathcal{U}_{p_i}$ $u_b = 1$ ，那么我们在 S 中插入 p_i 。否则，我们不会将其插入 S 中，即我们已经从上一次迭代中的 S_p^c 中采样了一个点。接下来，从包含 p_i 的叶节点开始，我们遍历树底部，直到到达根节点。对于我们遇到的每个节点 v 我们设置 $v_q = 0$ 。在对 P 中的所有点进行采样后，我们返回集合 S 。

LEMMA 3.1. S 中的最小成对距离为 $\frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)}$ ，对于每种颜色 $c_j \in C$ ，它保持该 $\mathbb{E}[|S(c_j)|] \geq \frac{k_j}{1+\varepsilon}$ 。

PROOF. 首先，我们证明 S 的最小成对距离为 $\frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)}$ 。设 p_i, p_ℓ 是一对距离小于 $\frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)}$ 的点。在不损失一般性的情况下，假设 p_i 首先被添加到 S 中。假设 p_ℓ 在后续迭代中被选为示例。由于 $\|p_i - p_\ell\| < \frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)}$ ，根据定义，存在一个唯一的节点 $u \in \mathcal{U}_{p_\ell}$ 使得 $p_i \in \square_u \cap P$ 。因此，

p_i 位于植根于 u 的子树的叶节点中。由于已经选择了 p_i ，因此我们有该 $u_b = 0$ （因为 u 是 p_i 的叶节点的祖先），因此 p_ℓ 不会插入 S 中。

接下来，我们讨论公平性要求。让我们 p_ℓ 成为 $\hat{x}_\ell > 0$ 的一点。假设 V_t 集合 $S_{p_\ell}^\varepsilon$ 中包含 S 的第一个点是第 t 步的点。然后

$$\begin{aligned} \Pr[p_\ell \in S] &= \sum_{t=1}^n \Pr[\sigma(t) = p_\ell \mid V_t] \Pr[V_t] = \sum_{t=1}^n \frac{\hat{x}_\ell}{\sum_{p_i \in S_{p_\ell}^\varepsilon} \hat{x}_i} \Pr[V_t] \\ &= \frac{\hat{x}_\ell}{\sum_{p_i \in S_{p_\ell}^\varepsilon} \hat{x}_i} \sum_{t=1}^n \Pr[V_t] = \frac{\hat{x}_\ell}{\sum_{p_i \in S_{p_\ell}^\varepsilon} \hat{x}_i} \geq \frac{\hat{x}_\ell}{1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

最后一个不等式成立，因为 $\sum_{p_i \in S_{p_\ell}^\varepsilon} \hat{x}_i \leq 1 + \varepsilon$ 来自 Constraints (??)。对于 $c_j \in C$ ， $\mathbb{E}[|S(c_j)|] \geq \sum_{p_i \in P(c_j)} \frac{\hat{x}_i}{1 + \varepsilon} \geq \frac{k_j}{1 + \varepsilon}$ 。 \square

舍入在 $Q_R = O(n(\log n + \varepsilon^{-d}))$ 时间内执行，因为 Ξ 具有 $O(\log n)$ 高度，并且每个查询都需要 $O(\log n + \varepsilon^{-d})$ 时间。

Example (cont). We show the execution of the Round procedure using our example in Figure ?? . Let $\hat{x}^\top = [.2, .2, .05, .15, .25, .15]$. Initially, for every node $u^{(i)}$ in Figure ?? (Middle), we have $u_b^{(i)} = 1$. In the while loop (lines 4–10) we first sample a point from P . Let p_2 be the first point we sample. We get $\mathcal{U}_{p_2} = \{u^{(5)}, u^{(3)}, u^{(8)}\}$. All nodes in \mathcal{U}_{p_2} have weight 1 so in line 8, we add p_2 in S . Then, starting from $u^{(9)}$, we set all the weights of the nodes to 0 until we reach the root. Hence, we set $u_b^{(9)} = u_b^{(5)} = u_b^{(2)} = u_b^{(0)} = 1$. In the next iteration of the while loop, assume that we sample the point p_6 . We have $\mathcal{U}_{p_6} = \{u^{(3)}, u^{(8)}, u^{(9)}\}$. We observe that $u_b^{(9)} = 0$ so we do not add p_6 in S . Intuitively, p_6 is very close to p_2 that we have already added. Starting from $u^{(3)}$, we set $u_b^{(3)} = u_b^{(1)} = 0$. In the next iteration, assume that we sample p_5 . We get $\mathcal{U}_{p_5} = \{u^{(4)}\}$. In line 7, we observe that $u_b^{(4)} = 1$ so we add p_5 in S . We also set $u_b^{(7)} = u_b^{(4)} = 0$ (all the other nodes above $u^{(4)}$ have already weight equal to 0) . Next, assume that we sample p_3 . We have $\mathcal{U}_{p_3} = \{u^{(5)}, u^{(1)}\}$. However, $u_b^{(5)} = u_b^{(1)} = 0$ so we do not add p_3 in S . We also set $u_b^{(8)} = 0$. Next, assume that we sample p_4 . We have $\mathcal{U}_{p_4} = \{u^{(6)}, u^{(10)}\}$ with $u_b^{(6)} = u_b^{(10)} = 1$. So we add p_4 in S and we set $u_b^{(6)} = 0$. In the final iteration, we sample p_1 . We get $\mathcal{U}_{p_1} = \{u^{(5)}, u^{(8)}\}$ and we observe that $u_b^{(5)} = 0$ so we do not add p_1 in S . We set $u_b^{(10)} = 0$. Our algorithm returns $S = \{p_2, p_5, p_4\}$.

Compute the set Γ . We note that so far we assumed that γ is any distance and we tried to find a solution S with $\text{div}(S) \geq \frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)}$. In order to find a good approximation of the optimum diversity γ^* , we use the notion of the Well Separated Pair Decomposition (WSPD) [??] briefly described in Section ?? . Let Γ be the sorted array of $O(n/\varepsilon^d)$ distances from WSPD. Any pairwise distance in P can be approximated by a distance in the array Γ within a factor $1 + \varepsilon$, hence, we might not get the optimum γ^* exactly. In the worst case, we might get a smaller value which is at least $\frac{\gamma^*}{1+\varepsilon}$. We need $O(n\varepsilon^{-d} \log n)$ time to compute and sort the WSPD distances, so $Q_\Gamma = O(n\varepsilon^{-d} \log n)$.

把所有东西放在一起，我们得到了下一个定理。

THEOREM 3.2. 设 C 是一组 m 颜色， P 是常数 d 的一组 \mathbb{R}^d n 点，其中每个点 $p \in P$ 都与一个颜色 $c(p) \in C$ 相关联，并设 k_1, \dots, k_m m 具有 $k_1 + \dots + k_m = k$ 的整数参数。让 $\varepsilon \in (0, 1)$ 成为一个常数。存在一种用于 FairDiv 问题的算法，该算法返回一组 $S \subseteq P$ ，使得每种颜色 $c_j \in C$ $\mathbb{E}[|S(c_j)|] \geq \frac{k_j}{1+\varepsilon}$ ，并在 $O(nk \log^3 n)$ 时间和 $O(n)$ 空间中 $\text{div}(S) \geq \frac{\gamma^*}{2(1+\varepsilon)}$ 。

3.2 高概率的多样性

在本小节中，我们将介绍如何使用上一小节的结果来获得一个解决方案，其中公平性约束对于任何参数 $\delta \in (0, 1)$ 的概率至少为 $1 - \delta$ 。我们从 [?] 获得直觉，但是我们的算法的实现有重大变化，以实现近乎线性的时间执行。

我们将从 MWU 方法推导出的近最优分数 \hat{x} 解转换为新的分数 $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$ 解。回想一下， \mathcal{T} 是一棵在 P 上构建的 BBD 树。回想一下， $\mathcal{U}(p, \beta)$ 是查询 $\mathcal{T}(p, \beta)$ 返回的规范节点集。设 $S_p(\beta) \subseteq P$ 是与规范节点 $\mathcal{U}(p, \beta)$ 关联的矩形所覆盖的点集。请注意， $S_p^\varepsilon = S_p(\frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)})$ 。

我们将构造 \hat{y} 可行解是以下一组（非线性）约束的解。

$$\sum_{p_i \in P(c_j)} y_i \geq k_j, \quad \forall j \in [m] \quad (14)$$

$$\sum_{p_i \in S_p(\frac{\gamma}{6(1+\varepsilon)^2})} y_i \leq 1 + \varepsilon, \quad \forall p \in P \quad (15)$$

$$y_i \geq 0, \quad \forall p_i \in P \quad (16)$$

$$y_i > 0 \text{ and } y_\ell > 0 \Rightarrow \|p_i - p_\ell\| \geq \frac{\gamma}{3(1+\varepsilon)^2}, \quad (17)$$

$$\forall p_i, p_\ell \in P(c_j), \forall j \in [m]$$

接下来，我们描述用于获取新约束集的解 \hat{y} 的算法。对于每种颜色 $c_j \in C$ 我们在 $P(c_j)$ 上构建一个 BBD 树 \mathcal{T}_j 。对于查询 $\mathcal{T}_j(p, \beta)$ ，我们像以前一样定义 $\mathcal{U}_j(p, \beta)$ 和 $S_{p,j}(\beta)$ ，只考虑颜色点 c_j 。 \mathcal{T}_j 中 p_i 的每个点都与其权重 \hat{x}_i 相关联。在每棵树的每个节点 $u \in \mathcal{T}_j$ 中，我们存储存储在植根于 u 的子节点中的点的权重之和 $u.s$ ，即 $u.s = \sum_{p_i \in \square_u \cap P(c_j)} \hat{x}_i$ 。给定一个查询球 $\mathcal{B}(p, r)$ 我们可以在 \mathcal{T}_j 中运行加权范围求和查询，并在 $O(\log n + \varepsilon^{-d})$ 时间内返回 $M_j(p, r) = \sum_{p_i \in S_{p,j}(r)} \hat{x}_i$ 。如果 $u.s > 0$ ，则我们称节点 u 活动。否则，如果 $u.s = 0$ ，则节点 u 处于非活动状态。

对于每个 p_i 具有 $\hat{x}_i > 0$ 且没有非活动祖先的点，我们执行以下步骤。让 c_j 成为 p_i 的颜色。我们对 \mathcal{T}_j 运行一个 sum 查询，得到 $\hat{y}_i = M_j(p_i, \frac{\gamma}{3(1+\varepsilon)^2})$ 。在搜索过程中，如果我们访问一个节点 u $u.s = 0$ ，我们将停止遍历根于 u 的子树。对于每个节点 $u \in \mathcal{U}_j(p_i, \frac{\gamma}{3(1+\varepsilon)^2})$ ，我们从树的 u 遍历到树的根，对于我们访问的每个节点 v ，我们更新 $v.s \leftarrow v.s - u.s$ 。然后我们设置 $u.s = 0$ 。在此过程结束时，如果有 \hat{y}_i 个值未定义，我们将 $\hat{y}_i = 0$ 设置为。

Correctness. 我们表明，我们的方法找到了满足新约束 \hat{y} 解。满足约束 (??) $\sum_{p_i \in P(c_j)} \hat{y}_i \geq k_j$ ，因为对于每个颜色 $c_j \in C$ ， $\sum_{p_i \in P(c_j)} \hat{y}_i = \sum_{p_i \in P(c_j)} \hat{x}_i$ 。这种等式成立，因为当我们找到节点 u 作为查询 $\mathcal{T}_j(p, \frac{\gamma}{3(1+\varepsilon)^2})$ 的规范节点时，我们将 u 设置为非活动节点，因此在下一次迭代中，没有点 $q \in \square_u \cap P(c_j)$ 对另一个变量 \hat{y}_ℓ 贡献。对于约束 (??)，对于每个点 $p \in P$ ，我们都有，

$$\begin{aligned} \sum_{p_i \in S_p(\frac{\gamma}{6(1+\varepsilon)^2})} \hat{y}_i &\leq \sum_{p_\ell \in P: \exists p_i \in S_p(\frac{\gamma}{6(1+\varepsilon)^2}), p_\ell \in S_{p_i}(\frac{\gamma}{3(1+\varepsilon)^2})} \hat{x}_\ell \\ &\leq \sum_{p_\ell \in P: \|p - p_\ell\| \leq \frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)}} \hat{x}_\ell \leq \sum_{p_\ell \in S_p(\frac{\gamma}{2(1+\varepsilon)})} \hat{x}_\ell \\ &= \sum_{p_\ell \in S_p^\varepsilon} \hat{x}_\ell \leq 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

约束 根据定义满足 (??)。最后, 对于 Constraints (??), 请注意, 当我们的算法设置一些正值时 \hat{y}_i 那么 $\mathcal{U}_j(p_i, \frac{\gamma}{3(1+\epsilon)^2})$ 中的所有规范节点都设置为非活动状态。因此, 任何与 $\|p_i - p_\ell\| < \frac{\gamma}{3(1+\epsilon)^2} p_\ell$ 的点都至少有一个非活动的祖先, 并且 \hat{y}_i 设置为 0。

Running time. 我们在 $O(n \log n)$ 时间内 \mathcal{T}_j 构建所有 BBD 树。对于每个点 p_i 我们检查 $O(\log n)$ 时间内是否没有非活动祖先, 因为 \mathcal{T}_j 具有深度 $O(\log n)$ 。对 \mathcal{T}_j 的每个加权范围求和查询都需要 $O(\log n + \epsilon^{-d})$ 时间。 $u.s$ 变量也会及时更新 $O(\log n + \epsilon^{-d})$ 。总体而言, 给定 \hat{x} 的值, 我们可以在 $O(n(\log n + \epsilon^{-d}))$ 时间内计算 \hat{y} 。

舍入. 四舍五入程序与小节 ?? 中的四舍五入类似。同样, 我们构造一个 BBD 树 Ξ 从 P 采样点。每次选择一个点 p_i , 我们都会检查在 $\Xi(p_i, \frac{\gamma}{6(1+\epsilon)^3})^3$ 区域的上一次迭代中是否已经选择了另一个点。使用 Lemma ?? 的证明, 我们得到对于我们返回的集合中的任何一对 $p_i, p_j \in S$, 我们有 $\min_{p,q \in S} \|p-q\|_2 \geq \frac{\gamma}{6(1+\epsilon)^3}$ 。此外, 设 Y_i 为随机变量, 如果 $p_i \in S$ 则 1, 否则 0。使用相同的证明, 我们得到每种颜色 c_j 的 $\mathbb{E} \left[\sum_{p_i \in S(c_j)} Y_i \right] \geq \frac{k_j}{1+\epsilon}$ 。根据定义, Y_i 的所有变量都是独立的, 因此我们可以应用切尔诺夫边界来获得每种颜色的点数的边界, 概率很高。特别是, 如果 $k_j \geq 3 \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2} \log(2m)$, 我们得到 $\Pr[\sum_{p_i \in S(c_j)} Y_i \leq (1-\epsilon) \frac{k_j}{1+\epsilon}] \leq \frac{1}{2m}$ 。如果我们应用并集边界, 我们 $c_j \in C$ 所有颜色的概率至少为 $1/2$ 个, 我们都有该 $\sum_{p_i \in S(c_j)} Y_i \geq (1-\epsilon) \frac{k_j}{1+\epsilon}$ 。如果我们重复该过程 $\log \frac{1}{\delta}$ 迭代, 那么至少有 $1-\delta$ 概率, 我们找到一个解, S 所有颜色 $c_j \in C \sum_{p_i \in S(c_j)} Y_i \geq (1-\epsilon) \frac{k_j}{1+\epsilon}$ 。在每次重复中, 我们都会花费 $O(n(\log n + \epsilon^{-d}))$, 如小节 ??。舍入过程的总运行时间为 $O(n \log(\frac{1}{\delta})(\log n + \epsilon^{-d}))$ 。

最后, 正如我们在 Subsection ?? 中所做的那样, 回想一下, 我们对 WSPD 集 L 运行二进制搜索, 找到一个值 γ 使得 $\gamma^* \geq \gamma \geq \gamma^*/(1+\epsilon)$ 。

把所有东西放在一起, 并设置 $\epsilon \leftarrow \epsilon/6$,⁴ 我们得到下一个定理。

THEOREM 3.3. 设 C 是一组 m 颜色, P 是常量维数 d 的一组 \mathbb{R}^d n 点, 其中每个点 $p \in P$ 都与颜色 $c(p) \in C$ 相关联, 并设 k_1, \dots, k_m m 整数参数, 每个 $c_j \in C$ 都有 $k_1 + \dots + k_m = k$ 和 $k_j \geq 3(1+\epsilon)\epsilon^{-2} \log(2m)$ 。设 ϵ 是一个常量参数, δ 是一个参数。存在一种算法, 它返回一个集合 $S \subseteq P$, 使得每种颜色 $c_j \in C$ 的概率至少为 $1-\delta$ 的 $|S(c_j)| \geq \frac{k_j}{1+\epsilon}$, 并且 $\text{div}(S) \geq \frac{\gamma}{6(1+\epsilon)} O(nk \log^3 n + n \log(\frac{1}{\delta}) \log n)$ 时间和 $O(n)$ 空间。

4 核心集

如 Section ?? 所示, 在 [?] 中, 他们描述了用于 FairDiv 问题的 $(1+\epsilon)$ -coreset。特别是, 使用 Gonzalez 算法 [?] k 中心聚类问题, 他们在 $O(nk\epsilon^{-d})$ 时间内得到一组 $O(mk\epsilon^{-d})$ 个点的 $G \subseteq P$, 这样 G 包含一个多样性至少为 $\gamma^*/(1+\epsilon)$ 的 FairDiv 问题的解。它们的正确性证明依赖于 Gonzalez 算法的执行, 该算法从每次迭代中已选择的中心集中选择最远的点。不幸的是, 冈萨雷斯算法需要 $O(nk)$ 时间。理想情况下, 我们希望使用其他更快的常数近似算法来解决欧几里得情况下的 k 中心问题。在本节中, 我们将展示一个更通用的核心集结构。我们表明, 如果使用任何常数近似算法为欧几里得空间中的 k' 中心聚类问题选择 $k' = O(\epsilon^{-2d}k)$ 颜色 $c_j \in C$ 点, 那么它们的并集是 FairDiv 问题的有效核心集。

让 $\text{Alg}O(T(n, k'))$ 时间内运行的 k' -center 聚类问题的 α 近似值。对于每个颜色 $c_j \in C$, 我们在 $P(c_j)$ 上运行 Alg for $k' = O(\epsilon^{-2d}k)$, 我们得到一组中心 G'_j 。我们返回核心集 $G' = \cup_{c_j \in C} G'_j$ 。核心集 G' 是在 $O(\sum_{c_j \in C} T(|P(c_j)|, k'))$ 时间内构造的, 基数为 $|G'| = O(\epsilon^{-2d}km)$ 。

LEMMA 4.1. 集合 G' 是用于 FairDiv 问题的 $(1+\epsilon)$ -coreset。

³出于技术原因, 我们将分母设置为 $(1+\epsilon)^3$ 而不是 $(1+\epsilon)^2$ 。

⁴请注意, $\frac{\gamma}{6(1+\epsilon/6)^4} \geq \frac{\gamma}{6(1+\epsilon)}$ 和 $\frac{1-\epsilon/6}{1+\epsilon/6} k_j \geq \frac{k_j}{1+\epsilon}$ 表示 $\epsilon \in (0, 1)$ 。

PROOF. 我们修复了一个颜色 $c_j \in C$ 。对于任何 k ，设 μ_k 是 $P(c_j)$ 中 k -center 聚类问题的最佳半径。让 $\hat{k} = O(\varepsilon^{-d}k)$ $k' = O(\varepsilon^{-2d}k)$ 。对于子集 $Q \subseteq P$ ，我们定义 $\mu(Q) = \max_{p \in P(c_j)} \min_{q \in Q} \|p - q\|$ ，即 $|Q|$ 中心解的值 $Q P(c_j)$ 。设 ξ 是一个常数。设 $D \mathbb{R}^d$ 中的网格，使得每个网格像元的边长为 $\frac{\varepsilon \mu_k}{4\alpha \xi}$ 。让 $A = \emptyset$ 。对于每个单元 $g \in D$ ，如果 $|g \cap P(c_j)| > 0$ ，那么我们在 A 中插入一个代表点 $p_g \in D \cap P(c_j)$ 。已知 $|A| = O(\varepsilon^{-2d}k)$ ，对于每个点 $p \in P(c_j)$ 都存在一个点 $p_a \in A$ 使得 $\frac{\varepsilon}{4\alpha} \mu_k$ 。因此， $\mu(A) \leq \frac{\varepsilon}{4\alpha} \mu_k$ 。根据定义，它还认为 $\mu_{k'} \leq \mu(A)$ 。由此可见 $\mu_{k'} \leq \frac{\varepsilon}{4\alpha} \mu_k$ 。我们有 $\mu(G'_j) \leq \alpha \mu_{k'} \leq \frac{\varepsilon}{4} \mu_k$ 。对于任何 k ，设 σ_k 为 $P(c_j)$ 中（不公平的） k -MaxMin 多样化问题的最优解的最小成对距离（即，在 $P(c_j)$ 中选择一组最大化最小成对距离的 k 点）。 $\sigma_k \geq \mu_k$ [?] 总是正确的。众所周知，用于 k 迭代的 Gonzalez 算法返回的解具有至少 $\frac{1}{2} \sigma_k$ [?] 的多样性。设 $O = \{o_1, \dots, o_k\}$ 是 Gonzalez 算法（按顺序）在 $P(c_j)$ 上返回的 \hat{k} 中心列表。对于任何 $o_i \in O$ ，让 $p_i \in G'_j$ 成为它在 G'_j 中最近的点，让 $P'_j = \bigcup_{i \in [\hat{k}]} p_i$ 和 $P' = \bigcup_{c_j \in C} P'_j$ 。我们证明 $P' \subseteq G'$ 是一个有效的 $(1 + \varepsilon)$ -coreset。让我们 $r = \|o_i - o_\ell\|$ 任何一对 $o_i, o_\ell \in O$ 我们有 $\|p_i - p_\ell\| \geq r - \|o_i - p_i\| - \|o_\ell - p_\ell\| \geq r - \frac{\varepsilon}{2} \mu_k \geq r - \frac{\varepsilon}{2} \sigma_k \geq (1 - \varepsilon)r$ 。最后一个不等式成立是因为 $r \geq \frac{1}{2} \sigma_k$ （回想一下，冈萨雷斯算法返回一组具有至少 $\frac{1}{2} \sigma_k$ 多样性的点）。同样， $\|p_i - p_{i+1}\| \leq (1 + \varepsilon)r$ 。因此， $(1 - \varepsilon)r \leq \|p_i - p_{i+1}\| \leq (1 + \varepsilon)r$ 。定理 5 in [?] 中的所有不等式都在 $(1 - \varepsilon)$ （或 $(1 + \varepsilon)$ ）因子内满足，因此通过设置 $\varepsilon \leftarrow \varepsilon/\zeta$ ，对于依赖于 d 的足够大的常数 ζ ，我们得出结论， G' 是 FairDiv 的 $(1 + \varepsilon)$ 核集。 \square

总的来说，我们陈述了我们的新结果。

THEOREM 4.2. 在欧几里得空间中，任何用于运行时 $O(T(n, k))$ 的 k 中心聚类的常数近似算法都可用于为 $O(\sum_{c_j \in C} T(|P(c_j)|, \varepsilon^{-2d}k))$ 时间内大小为 $O(\varepsilon^{-2d}mk)$ 的 FairDiv 问题派生 $(1 + \varepsilon)$ -coreset。

在下一个结果中 Alg 我们将固定为 Feder 和 Greene [?] 算法或 Har-Pelled 和 Raichel 算法 [?]，以分别在 $O(n \log k)$ 时间或预期时间内返回 k 中心聚类 $O(n)^2$ 近似值。使用我们的核心集 G' 作为定理中算法的输入 ?? 我们得到下一个推论。

COROLLARY 4.3. 存在一种算法，它返回一个集合 $S \subseteq P$ ，使得每种颜色 $c_j \in C \mathbb{E}[|S(c_j)|] \geq \frac{k_j}{1+\varepsilon}$ ，并在 $O(n \log k + mk^2 \log^3(k))$ 时间和 $O(n)$ 空间中 $\text{div}(S) \geq \frac{Y^*}{2(1+\varepsilon)}$ 。相同的算法可以在 $O(n + mk^2 \log^3(k))$ 预期的时间内执行。

使用我们的核心集 G' 作为定理中算法的输入 ?? 我们得到下一个推论。

COROLLARY 4.4. 存在一种算法，它返回一个集合 $S \subseteq P$ ，使得每个颜色 $c_j \in C |S(c_j)| \geq \frac{k_j}{1+\varepsilon}$ 的概率至少为 $1 - \delta$ ，并且 $O(n \log k + mk^2 \log^3 k + mk \log k \log \frac{1}{\delta})$ 时间和 $O(mk)$ 额外的空间 $\text{div}(S) \geq \frac{Y^*}{6(1+\varepsilon)}$ 。相同的算法可以在 $O(n + mk^2 \log^3 k + mk \log k \log \frac{1}{\delta})$ 预期的时间内执行。

我们注意到，Corollary ?? 或 Corollary ?? 中算法的运行时间并不总是分别比 Theorem ?? 或 Theorem ?? 中的算法快。对于较小的 k 值，使用核心集的算法速度更快，而当 k 较大时，不使用核心集的算法的渐近运行时间更快。

5 扩展

在本节中，我们将展示如何使用我们的核心集构造和用于 FairDiv 问题的新算法在流设置 SFairDiv 问题中获得更快的算法。我们还展示了如何使用我们的结果来设计 QFairDiv 问题的第一个有效数据结构。

5.1 流式处理设置

在流式处理设置中，我们关心三个数量：算法在每次迭代中需要存储的元素数、我们获得的任何新项的更新时间，以及为 FairDiv 问题创建实际解决方案所需的后处理时间。

有两种已知算法可用于 SFairDiv 问题。在 [?] 中，他们描述了一种流算法，该算法将 $O(mk \log \Delta)$ 元素存储在内存中，每个元素需要 $O(k \log \Delta)$ 个时间进行流处理，并且 $O(m^2 k^2 \log \Delta)$ 返回 $\frac{1-\epsilon}{3m+2}$ 近似解的后处理时间。对于最接近的对问题 [?]，每个元素的流处理时间可以提高到欧几里得空间中的 $O(\log k \cdot \log \Delta)$ ，如 [?] 中所述。在 [?] 中，他们将近似因子改进为常数，但所有渐近复杂度仍然取决于 $\log \Delta$ 。请注意，即使在 \mathbb{R}^d 使所有数量在 n 上都呈线性 $n \Delta$ 也可以是指数级的。我们提出了第一个常量近似流算法，称为 StreamMFD，用于 FairDiv 问题，其空间、更新和后处理时间与 Δ 无关。

由于 Lemma ?? 在我们目前看到的一组项目上保持 k -center 聚类解的任何恒定近似就足够了。众所周知，加倍算法 [?] 在 \mathbb{R}^d $O(k \log k)$ 更新时间（使用最接近对问题的高效动态数据结构 [?]，如 [?] 中所述）存储 $O(k)$ 元素 [?] 中，对 k 中心问题保持 8 近似。使用加倍算法来保持 k 中心聚类的恒定近似，我们在定理 ?? 中的新核心集构造，以及我们在定理 ?? 中的新近线性时间算法，对于 FairDiv 问题，我们给出了以下 SFairDiv 问题的结果。

THEOREM 5.1. 对于常量参数 ϵ ，存在一个用于 SFairDiv 问题的流算法，该算法存储 $O(mk)$ 项，具有 $O(k \log k)$ 更新时间，并且具有 $O(mk^2 \log^3 k)$ 后处理时间。在后处理之后，算法返回一组点 S ，使得每个颜色 $c_j \in C$ 的 $\mathbb{E}[S(c_j)] \geq \frac{k_j}{1+\epsilon}$ 和 $\text{div}(S) \geq \frac{\gamma^*}{2(1+\epsilon)}$ 。

在流式处理设置中，我们的新算法称为 StreamMFD。

5.2 范围查询设置

给定一组 n 点 $P \in \mathbb{R}^d$ ，in [??] 它们表明存在一个可以在 $O(n \log^{d-1} n)$ 时间内构造 $O(n \log^{d-1} n)$ 空间的数据结构，这样，给定任何查询超矩形 R 和任何查询参数 k ， $P \cap R$ 中 k -center 聚类的 $(2 + \epsilon)$ 近似值在 $O(k \log^{d-1} n + \epsilon^{-d} k \log \frac{k}{\epsilon})$ 时间内返回。利用这个 k 中心数据结构，我们根据定理 ?? 有效地 $P \cap R$ 构造了我们的核心集，然后使用我们在定理 ?? 中新的近线性时间算法，针对 FairDiv 问题，我们给出了 QFairDiv 问题的结果如下。

THEOREM 5.2. 对于 QFairDiv 问题，可以在 $O(n \log^{d-1} n)$ 时间内构造大小为 $O(n \log^{d-1} n)$ 的数据结构，使得给定一个查询矩形 R 、一个常量参数 ϵ 和参数 k_1, \dots, k_m $k_1 + \dots + k_m = k$ ，它在 $O(mk \log^{d-1} n + mk^2 \log^3 k)$ 时间内返回一个集合 $S \subseteq P \cap R$ ，使得 $\mathbb{E}[S(c_j)] \geq \frac{k_j}{1+\epsilon}$ 每种颜色 $c_j \in C$ ，和 $\text{div}(S) \geq \frac{\gamma^*}{2(1+\epsilon)}$ 。

使用定理 ??（而不是定理 ??）的结果，我们也可以高概率地满足公平性约束。

6 实验

在本节中，我们评估了算法在识别多样化和公平点集方面的有效性。具体来说，我们回答了以下研究问题：

RQ1: MFD 行为如何随着参数的变化而变化？MFD 是否违反了公平性要求？此 RQ 确定了用于与基线进行比较的 MFD 的最佳参数。

RQ2: MFD 结果与其他基线相比如何？确定公平和多样化的解决方案是否有效？

RQ3: 我们的新算法在流媒体设置中 StreamMFD 的效率如何？

数据集我们考虑以下数据集。

- (1) 成人数据集 [?] 包含大约 32K 条个人记录，描述他们的收入和教育细节。种族和性别被视为敏感属性，可以生成 10 颜色（受保护的群体）。
- (2) 糖尿病数据集 [?] 包含大约 100K 患者的健康统计数据，其中性别和医疗处方用于生成颜色。
- (3) 人口普查数据集 [?] 包含大约 200 万条个人记录。年龄和性别用作考虑 14 颜色的敏感属性。我们选择 6 数值属性来表示数据集中的点。

Dataset	Groups	m	d	n
Adult	Race, Sex	10	6	32,561
Diabetes	Sex, Meds Prescribed-Y/N	4	8	101,763
Census	Sex, Age	14	6	2,426,116
Popsim	Race	5	2	4,110,608
Popsim_1M	Race	5	2	821,804
Beer reviews	Style of beer	3	6	1,518,829

Table 3. 数据集统计

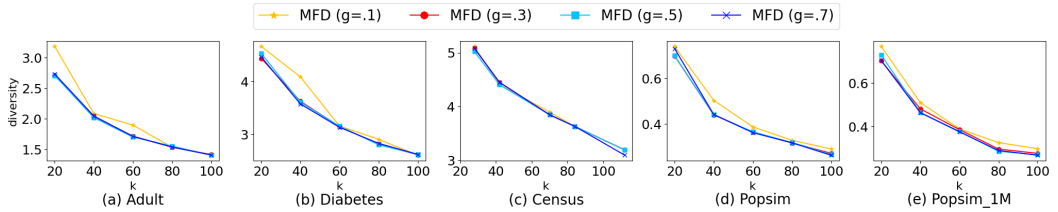


Fig. 3. 具有不同早期停止参数的 MFD 的多样性与 k 的比较。

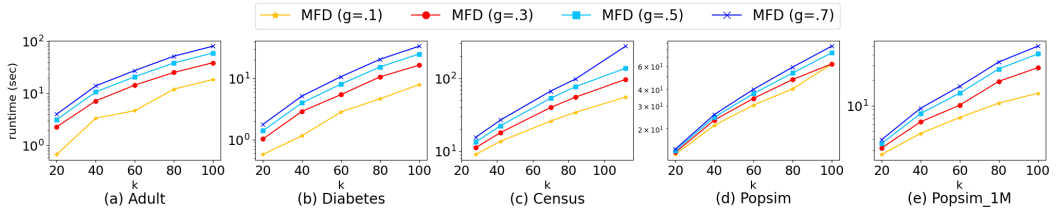


Fig. 4. 不同提前停止参数的 MFD 的运行时间与 k 的比较。

k	$g = 0.1$				$g = 0.3$			
	FN	FY	MN	MY	FN	FY	MN	MY
20	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0.2	0	1.2	0	0	0	0	0
60	0	0	0	0	0	0	0	0
80	0	0	0.4	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0

$g = 0.1$					$g = 0.3$				
Am Ind	As	Afr Am	Nat Haw	Wh	Am Ind	As	Afr Am	Nat Haw	Wh
0	0.2	0.2	0.4	0.4	0.4	0.2	1	0	0.2
0.6	1.4	1.2	0	0.4	0.2	0	0.2	0	0
0.4	0.4	1.2	0	0.4	0	0	0.8	0	0
1.4	0.4	1	0	0	0.6	0	1.4	0	0
0	0.4	0.4	1.4	0	0	0	0	0.8	0

Table 4. Number of points (on average) per color missed by MFD- 0.1 and MFD- 0.3 in Diabetes (left) and Popsim (right) datasets.

- (4) Popsim [?] 是一个半合成数据集，将人口统计数据与地理数据库相结合。它用于表示具有伊利诺伊州人口统计信息的个人级数据。种族被用作考虑 5 颜色的敏感属性。参数 longitude, latitude 用于将位置转换为 4,110,608 点 \mathbb{R}^2 。
- (5) Popsim_1M [?] . 同一半合成数据集的另一个版本，包含近 100 万人。
- (6) 我们使用 Beer 评论数据集在流媒体设置中进行实验。该数据集包含大量关于不同啤酒的评论。我们将评论分为三组：与拉格啤酒、艾尔啤酒和其他啤酒相关的评论。

基线我们将我们的算法与 FairDiv 问题的最新算法进行比较。

首先，我们讨论如何实现新的 MFD 算法。我们实现了 Corollary 中的主要算法 ?? 将 Theorem ?? 中的算法与 Theorem ?? 中的核心集构造相结合。对于核心集构造，我们修改了一个用于构造核心集的 python 实现 [?] . 对于每个颜色 $c_j \in C$ ，我们运行 Gonzalez 算法进

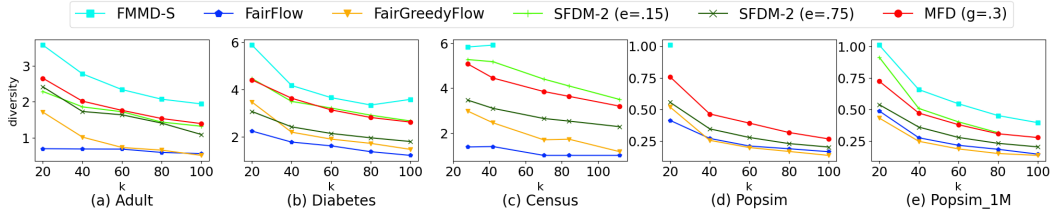


Fig. 5. MFD 和基线的多样性与 k 的比较。多样性越高越好。等于 k_j 。

行 k 迭代。最后，我们有一个大小为 $m \cdot k$ 的核心集。然后，将核心集作为我们 MFD 方法的输入。我们注意到，我们将核心集构建时间包含在 MFD 的总运行时间中。

接下来，我们描述了理论 MFD 算法和我们的实现之间的一些差异。我们没有构造一个 WSPD 来对距离进行二进制搜索，而是将最大可能的多样性作为上限 γ ：我们运行 Gonzalez 算法在整个点集 P 中进行 k 迭代，而不考虑颜色。已知所选点之间的最小成对距离是 FairDiv 多样性的上限。如果 MFD 没有找到可行解的分集 γ ，我们设置 $\gamma \leftarrow (1 - 0.15)\gamma$ ，然后重新运行算法，停在第一个可行的解上。此外，我们没有使用 BBD 树，而是使用 ParGeo 的 KD 树 [?]，并进行了修改以支持求和查询。在实践中，我们观察到，有时 MFD 算法运行所有 $T = O(\epsilon^{-2}k \log n)$ 迭代只是为了找到一个未舍入的解决方案，该解决方案与在早期迭代中停止找到的解决方案非常相似。我们修改了算法以允许提前停止。我们引入了一个参数 $g \in (0, 1]$ ，使得 MFD 算法最多运行 $g \cdot T$ 次迭代，而不是理论中的完整 T 迭代。我们在 0.3 的实验中确定了默认值 g 。正如我们将要展示的，这不会影响结果的质量，但会显著改善 MFD 算法的运行时间。由于 MFD 是一种随机算法，因此在每种情况下，我们都会运行该算法五次，并报告平均多样性和运行时间。

- MFD：如上所述，我们的新实现。

- SFDM-2：是在 [?] 中设计和实现的流算法⁵。该算法使用参数 ϵ 来控制解决方案中的错误。我们尝试了两个具有代表性的错误 $\epsilon = 0.15$ 和 $\epsilon = 0.75$ 。我们分别称它们为 SFDM-2 ($e = .15$) 和 SFDM-2 ($e = .75$)。

- FMMD-S：算法在 [?] 中提出并实现。

- FairFlow [?] 在 [?] 中实现。

- FairGreedyFlow [?] 实现于 [?]

所有算法都是用 python 实现的，除了 ParGeo 中的 kd-tree 实现是用 C++ 实现的。如果一个算法需要超过 30 分钟才能完成，我们会停止其执行，并且不会在数字中显示结果。所有数据集和我们的代码都可以在 [?] 中找到。

设置。我们在运行 Debian 11 Bullseye v20231004 的 e2-standard-16 Google Cloud 虚拟机上运行所有实验，该虚拟机具有 16 个 vCPU (8 个内核) 和 64 GB 内存。

6.1 微基准实验

在本节中，我们比较了 MFD 算法在不同早期停止参数 g 的多样性和运行时间。我们测试 $g = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ 。在所有情况下，我们设置 $k_j = k/m$ (等于 k_j)。我们也使用比例 $k_j = k \frac{|P(c_j)|}{n}$ 运行相同的实验，但我们从这个版本中跳过它们，因为所有观测值都与相等情况相同。在图 ?? 中，我们显示了所有数据集不同 k 值的多样性。我们观察到，提前停止对多样性的影响不大。图 ?? 表示不同值 k 的运行时间。它表明 g 越小，MFD 越快。

在我们得出 g 的较小值总是足够的结论之前，回想一定理 ?? (和推论 ??) 并不总是保证每个颜色 $c_j \in C$ 的最终解中至少有 k_j 个点。我们显示了不同参数的每种颜色的缺失点数

⁵该算法使用最小和最大成对距离来定义多样性的范围。在最初的实现中，作者手动选择了这个范围。为了公平地实现，我们使用 MFD 中使用的相同上限。作为下限，我们在构建的大小 $m \cdot k$ 的核心集中使用最小非零成对距离。

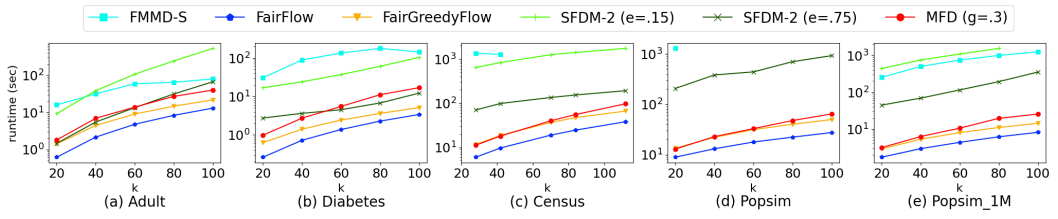


Fig. 6. MFD 和基线的运行时间与 k 的比较。等于 k_j 。

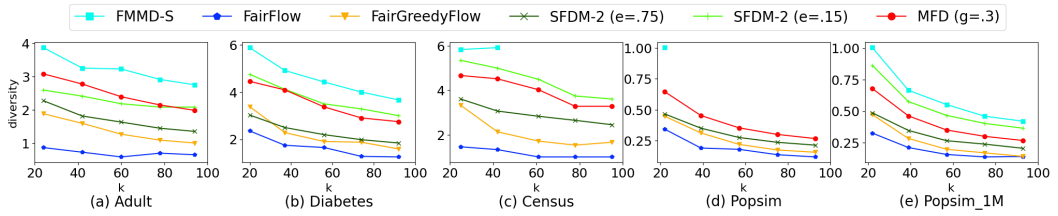


Fig. 7. MFD 和基线的多样性与 k 的比较。多样性越高越好。比例 k_j 。

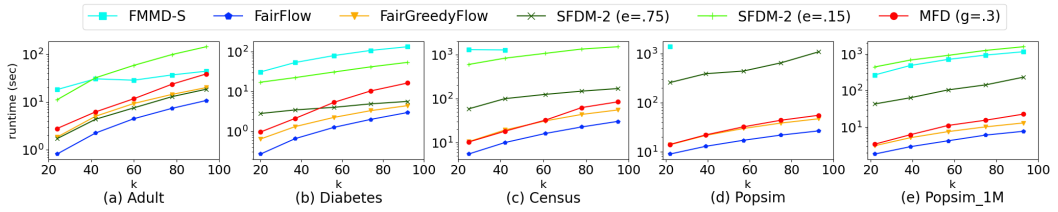


Fig. 8. MFD 和基线的运行时间与 k 的比较。比例 k_j 。

g . In Table ?? we show two representative results using the Diabetes (left table) and Popsim (right table) dataset for MFD with $g = 0.1$ and $g = 0.3$. For each k , we assume that for every color we should take the same number of points, i.e., in Diabetes (Popsim) dataset we should take at least $k/4$ ($k/5$) points per color. We run our algorithm five times and we show the number of missing points on average for each color. The groups in the second row of Diabetes represent sex and Y or N (if meds prescribed), while the groups in the second row of Popsim represent race. When $g = 0.1$ MFD usually misses some points from each group. However for $g = 0.3$ in most cases, MFD-0.3 does not miss any point. For Diabetes, MFD-0.3 never misses a point. For Popsim, the maximum average number of points it misses for a group is 1.4. For each k it misses on average 1.16 points in total, over all groups. Generally, we observed that in all datasets, for every $g \geq 0.3$ it is rare to miss more than 2 points. We conclude that MFD for $g \geq 0.3$ successfully satisfies the fairness requirements. In the next sections, we fix $g=0.3$ for MFD.

Key Takeaways: MFD with $g = 0.3$ satisfies the fairness criterion for most settings, has comparable diversity to other values of g and is highly efficient as compared to higher values of g .

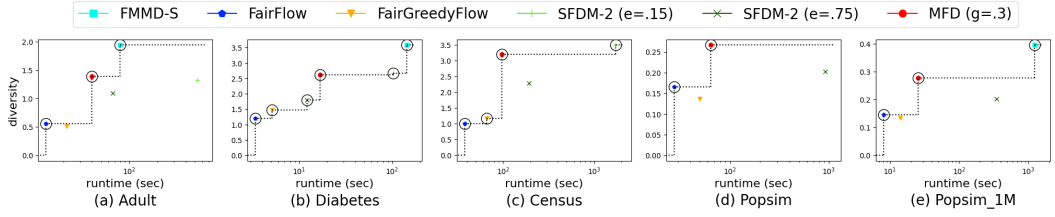


Fig. 9. For every algorithm we show the running time to derive a diverse set for $k = 100$ along with the diversity of the returned set. Only MFD and FairFlow always return a pareto-optimal solution.

6.2 端到端结果

为了将 MFD 的质量与最先进的质量进行比较，我们考虑了两组实验。在第一组中，公平性约束确保每种颜色返回的点数相等，即 $k_j = \frac{k}{m}, \forall j$ 。在第二组中，我们选择成比例的 k_j ，即 $k_j = k \frac{|P(c_j)|}{n}$ 。一般来说，第一组相等 k_j 会导致更公平的解决方案，但更难满足。

这种比较的主要目标是确定在合理时间内最大化多样性的技术。两种极端算法是：随机选择将从每种颜色中随机选择 k_j 点。这种方法预计会非常有效，但多样性会很差。穷举搜索将详尽地考虑所有可能的子集，以计算多样性并返回最佳解决方案。这种方法可能会返回高度准确的解决方案，但效率非常低。这种方法无法扩展到数百万大小的数据集。

该实验的主要目标是确定一种在合理时间内返回最佳解决方案的技术。

每种颜色的点数相等。图 ?? 比较了此设置的 MFD 和基线的多样性，其中每种颜色的点数相等（多样性越高越好）。我们观察到，返回解的多样性随着 k 的增加而降低。例如，MFD 的多样性从 $k = 20$ 的 5 减少到 $k = 100$ 的 3.5。

FMMD-S 在成人、糖尿病和 Popsim_1M 数据集中实现了最高的多样性，但它没有针对 $k > 40$ 的人口普查和 Popsim 数据集运行。因此，FMMD-S 无法扩展到百万级数据集。此外，它至少需要 MFD 所花费时间的 50 \times 。在所有其他技术中，MFD 实现了大多数 k 和数据集值的最佳多样性。SFDM-2 ($\epsilon = 0.15$) 基线在数据集和 k 运行时实现了与 MFD 相当（或在某些情况下略好）的多样性。但是，它 $k \geq 20$ 没有完成 Popsim 数据集，并且至少花费了 MFD 所花费时间的 50 \times 。在针对所有数据集和 k 运行的技术中，MFD 具有最佳的多样性。所有其他技术 SFDM-2 ($\epsilon = 0.75$)、FairFlow 和 FairGreedyFlow 实现的多样性都比 MFD 差。在这些技术中，FairFlow 和 FairGreedyFlow 在所有数据集中实现了最低的多样性。

图 ?? 比较了不同技术对不同 k 和数据集的运行时间。我们观察到，对于所有技术，运行时间都随着 k 而呈亚线性增加。FMMD-S 和 SFDM-2 通常比所有其他技术慢得多。所有其他技术（我们的方法 MFD 和基线 FairFlow，FairGreedyFlow）需要不到 40 秒的时间来识别超过 1M 记录的各种 100 点。事实上，MFD 在不到 80 秒的时间内就完成了 4M 记录的 $k = 100$ 次运行。相比之下，对于少于 1 M 点的数据集，需要超过 1000 秒的少数基线。这验证了 MFD 确定公平和多样化解决方案的效率。

Overall, FMMD-S and SFDM-2 return more diverse results, however for some datasets they do not even finish, or they take even 50X more time than our algorithm. At the same time, FairFlow and FairGreedyFlow are faster, but the sets they return have a much worse diversity. Although our algorithm is slightly slower than the fastest algorithms for FairDiv –it scales to large datasets, and returns sets with high diversity in reasonable time. Overall, it achieves the best tradeoff between diversity and time. Every other algorithm is either too slow (no result within 100 sec) or the diversity is too low (5 times worse than the best one).

In order to further show that MFD provides the best balance between diversity and running time, in Figure ??, we fix $k = 100$ (similar results hold for any other k), and for each algorithm we show the running time to compute a fair and diverse set along with the diversity of the returned set. We represent each algorithm as a point in the (runtime, diversity) plane. An algorithm

returns a pareto-optimal solution if and only if there is no other algorithm that computes a more diverse (fair) set faster. We observe that MFD and FairFlow are the only algorithms that always return a pareto-optimal solution. FairFlow always returns a pareto-optimal solution because it is the fastest algorithm, however it returns sets with arbitrarily low diversity (Figure ?? (c)). Overall, MFD achieves the best equilibrium between diversity and running time.

比例大小。图 ?? 和 ?? 比较了 MFD 和其他技术的多样性和运行时间，用于设置每种颜色返回的点数与其在数据集中的颜色大小成正比。这种情况的结果与相同大小的结果相似，其中 FMMD-S 实现了最高的多样性，但没有扩展到百万大小的数据集。SFDM-2 ($\epsilon = 0.15$) 的情况与 MFD 一样好，但 Popsim 数据集没有完成。在所有其他基线中，MFD 实现了最佳多样性，同时在不到一分钟的时间内确定了解决方案，即使对于数百万大小的数据集也是如此。

Key Takeaways:

- (1) MFD 在所有数据集上运行的技术中实现了最佳的多样性。
- (2) SFDM-2 ($\epsilon = 0.15$) and FMMD-S achieve higher diversity but they usually take 20× or even 60× more time than MFD for some datasets. 所有其他基线的多样性都比 MFD 差，但运行时间几乎相同。
- (3) MFD 在不到一分钟的时间内为一百万个比例数据集获得最佳质量结果。
- (4) MFD 在多样性和运行时间之间提供了最佳平衡。
- (5) MFD always returns a pareto-optimal solution.

MFD 和 FairGreedyFlow 的比较 . 假设给出相同的核心集作为输入，FairGreedyFlow 在 $O(k^2 m^4 \log(k))$ 时间内运行，而 MFD 在 $O(k^2 m \log^3(k))$ 时间内运行，因此理论上 MFD 比 FairGreedyFlow 更快。然而，在实践中，如图 ??， ?? 所示，FairGreedyFlow 的运行速度比 MFD 快。有两个原因可以解释这一点。i) MFD 的运行时间实际上取决于 $1/\epsilon^{d+2}$ (请查看 Section ?? 中的分析)。 ϵ, d 参数是常数，因此我们不包括最终渐近复杂度中的此因子。我们的实验表明，对于较大的 d (糖尿病数据集， $d = 8$)，FairGreedyFlow 比 MFD 快，而对于较小的 d (Popsim 数据集， $d = 2$)，运行时间几乎相同。ii) FairGreedyFlow，将 FairDiv 问题映射到最大流量问题。从理论上讲，求解最大流量的实例是很慢的。然而，在实践中，他们使用了 python 的 networkx 库中 Ford-Fulkerson 算法的优化实现。

6.3 流式处理设置

最后，我们展示了 SFairDiv 问题的实验。我们从定理 ?? 实现我们的算法，称为 StreamMFD，并将其效率和功效与 SFDM-2 进行比较，SFDM-2 在 [?] 中实现。⁶ 我们没有将我们的算法与 [?] 中提出的流算法进行比较，因为 i) 他们没有实现他们的算法，ii) 更新过程与 [?] 中的更新过程相同，以及 iii) 两种算法使用相同的内存量，因此结论几乎相同。在流式处理阶段的每一步，我们的算法存储 $O(km)$ 点，而 SFDM-2 存储 $O(km \log \Delta)$ 点。正如我们在离线情况下一样，我们运行两个版本的 SFDM-2 算法，即 SFDM-2 ($e = .15$) 和 SFDM-2 ($e = .75$)。对于不同的 k 值，在图 ?? 中，我们显示了平均更新时间 (插入新点的平均时间)、后处理时间 (流结束后构建最终解决方案的时间) 以及 StreamMFD 和 SFDM-2 返回的集合的多样性。StreamMFD 具有最快的更新时间，它具有最快的后处理时间，并且它返回的集合的多样性接近 SFDM-2 ($e = .15$) 返回的集合的多样性。另一方面，SFDM-2 ($e = .15$) 具有昂贵的更新时间 (有时比 StreamMFD 慢 30×)，而 SFDM-2 ($e = .15$) 返回的集合具有非常低

⁶回想一下，在离线设置中，我们使用核心集来定义 SFDM-2 的一系列多样性。在流式处理设置中，在有人访问整个输入集之前，无法计算任何核心集。如 [?] 中所述，首先引入的 SFDM-2，我们使用整个点集的最小 (非零) 和最大距离来定义多样性的范围 (他们假设这两个量在流开始之前是已知的)。

的多样性，并且它的更新时间 $2.5\times$ 慢于 StreamMFD。总体而言，StreamMFD 是流式处理设置中的最佳算法，因为它在更新时间、后处理时间和多样性之间提供了最佳平衡。

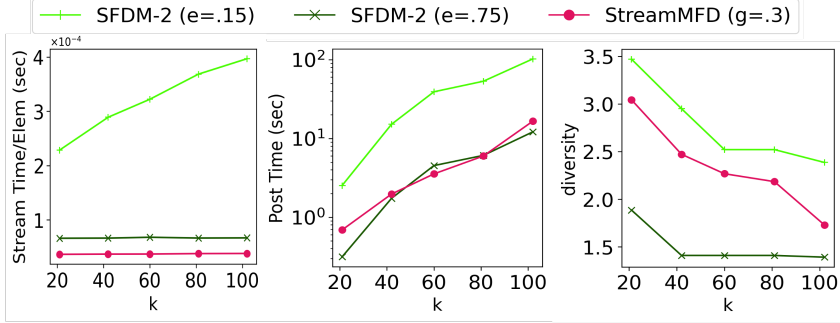


Fig. 10. 啤酒评论的平均更新时间、后处理时间和流媒体设置的多样性。

7 相关工作

In [?] 作者定义了 FairDiv 问题，并提出了通用度量空间的算法。特别是，当 $m = 2$ 时，他们展示了一种使用线性空间 $1/4$ 具有近似因子的 $O(nk)$ 时间算法。对于任意数量的颜色 m ，他们提出了在 $O(kn + m^2 k^2 \log k)$ 时间内运行并返回 $\frac{1}{3m-1}$ 近似值的 FairFlow。当 k 很小时，他们还提出了一种 $1/5$ 近似算法，其运行时间相对于 k 。在 [?] 中，他们改进了前一篇论文的一些结果。对于任意数量的颜色 m ，他们设计了一个基于 LP 的松弛算法，以获得满足期望公平性约束的 $1/2$ 近似值，即颜色 c_j 的预期点数至少为 k_j 。算法的运行时间是 $O(n^\lambda)$ 它使用 $\Omega(n^2)$ 空间，其中 λ 是求解 LP 的指数。相同的算法被扩展为返回 $1/6$ 近似值，使得颜色 c_j 的点数至少 $k_j/1 - \epsilon$ ，概率很高。运行时间和空间要求保持不变。在同一篇论文中，他们还提出了一种称为公平-贪婪-流的贪婪算法，该算法在 $O(nkm^3)$ 时间内返回一个 $\frac{1}{(m+1)(1+\epsilon)}$ 近似值，用于恒定 ϵ ，跳过 $\log n$ 因子。

在欧几里得度量中，他们在 [?] 年为 FairDiv 问题构建了一个大小为 $O(\epsilon^{-d} mk)$ 的 $(1 + \epsilon)$ -coreset， $O(nk)$ 时间。使用核心集，他们还设计了一种费尔-欧几里得算法，该算法在 $O(kn + m^{d+2} k \prod_{c_j \in C} k_j^2)$ 时间内返回常数近似值。最近， [?] 使用核心集结构提出了 FFMD-S 算法，该算法在常数 $\epsilon O(mkn + m^k)$ 时间内返回 $\frac{1-\epsilon}{5}$ -近似值。

在流式处理设置中，作者在 [??] 介绍了 SFDM-2 算法，该算法将 $O(k \log \Delta)$ 个项目存储在内存中，每个项目需要 $O(k \log \Delta)$ 个时间进行流式处理，并且需要 $O(k^2 \log \Delta)$ 后处理时间来输出 FairDiv 问题的 $\frac{1-\epsilon}{3m+2}$ 近似值，对于常数 ϵ 。在欧几里得空间中，每个元素的流处理时间可以提高到 $O(\log k \cdot \log \Delta)$ 。数量 Δ 定义为输入集的分布， $\Delta = \frac{\max_{p,q \in P} \|p-q\|}{\min_{p,q \in P} \|p-q\|} = O(2^n)$ 。在 [?] 中，他们给出了一个具有恒定近似因子的流算法，但空间、更新时间和后处理时间仍然取决于 $\log \Delta$ 。

公平性是在不同的多样性定义下研究的。在公平的最大和多样化中，目标是选择一个集合 $S \subseteq P$ ，使得 S 包含至少 k_j 个来自颜色 c_j 的点，并且成对距离的总和最大化，即 $\frac{1}{2} \sum_{p,q \in S} \|p - q\|$ 最大化。对于这个问题，有几种有效的常数近似算法 [?????]。公平最大和问题的目标函数与 FairDiv 有很大不同，因此这些论文中的技术不能用于我们的问题，[??]。最大最小分化与 k 中心聚类有很强的联系。例如，相同的贪婪 Gonzalez [?] 算法返回 Max-Min 多样化 [??] 的 $\frac{1}{2}$ 近似值， k -center 聚类 [?] 返回 2 近似值。Kleindessner et al. [?] 定义了公平 k 中心问题，其目标是找到具有颜色 c_j 最小化 k 中心目标的 k_j 中心。他们在 $O(km^2 n + km^4)$ 时间内提出了一种 $(3 \cdot 2^{m-1} - 1)$ 近似算法。此算法有许多改进，例如 [??]。 k 中心算法的分析与 k -Max-Min 多样化问题的算法不同。在某些情况下， k -center 的最佳解可能对 k -Max-Min 多样化不利，as shown in [?]。 For example, assume there are two blue points with coordinates 0 and $5 - \epsilon/2$ and two red points with coordinates $5 + \epsilon/2$ and 10 , for

an arbitrary small value $\varepsilon > 0$. Selecting the blue point with coordinate $5 - \varepsilon/2$ and the red point with coordinate $5 + \varepsilon/2$ constructs an optimum solution for the fair 2-center problem. However the diversity is equal to ε , while the optimum diversity for the FairDiv problem is $10 \gg \varepsilon$. 因此，尚不清楚公平 k -center 问题的算法是否可以用于 FairDiv 问题。

8 未来工作

我们的工作中衍生出许多有趣的开放性问题。是否有可能得到 FairDiv 问题的常数近似值，完全满足公平性？目标是从每个颜色 $c_j \in C$ 获得至少 k_j 分，而不是至少 $\frac{k_j}{1-\varepsilon}$ 分。检查本文中的新技术是否可用于加速 FairDiv 问题的其他版本 [?]，其中每个颜色 $c_j \in C$ 都有下界 k_j^- 和上限 k_j^+ 。最后，研究是否可以使用其他数据结构来获得具有有界倍增维数的度量的常数近似值是很有趣的。

Received October 2023; revised January 2024; accepted February 2024